

Третий Российский Экономический Конгресс — 2016
О договорной характеристике равновесия и ядра в неполных рынках
Маракулин В. М.,

В современной экономике наряду с рынками обычных продуктов можно наблюдать сложившиеся рынки специфических финансовых инструментов, называемых активами (assets). Примерами могут служить страховой бизнес, рынки фьючерсных контрактов, торговля опционами разного типа и т. д. Теория по данной проблематике начала бурно развиваться в начале 80-х годов 20-го века, результатом чего явилось построение, в расширенных структурных рамках модели Эрроу — Дебре, теории *неполных рынков* (напр. см. *Magill, Shafer (1991)*). Теория неполных рынков моделирует экономические обстоятельства, в которых экономические агенты живут и функционируют в рамках ограничений, предопределённых возможными различиями во временных моментах появления товаров и объективно обусловленной неопределённостью будущего. При этом применяются методы моделирования, которые отражают специфические финансовые черты, присущие реально существующим рыночным экономикам, покрывая одновременно классическую теорию распределения ресурсов. Тем не менее в современном варианте теория неполных рынков содержит весьма существенный пробел, состоящий в отсутствии удовлетворительной концепции коалиционного доминирования (распределений ресурсов) и, как следствие, — сколь-нибудь приемлемой концепции ядра.

Действительно, известно, что классическая концепция конкурентного равновесия обоснована также тем фактом, что никакая группа агентов (коалиция) не имеет стимулов к образованию автономной подэкономики (равновесное распределение принадлежит ядру — т. е. не доминируется никакой коалицией). Более того, в условиях совершенной конкуренции *каждое* распределение из ядра допускает ценовую децентрализацию, — т. е. является равновесным распределением (это известная гипотеза Эджворта). Однако в существующей теории неполных рынков такого рода соотношения отсутствуют и, более того, уже не существует сколь-нибудь приемлемого понятия коалиционного доминирования. Достаточно успешная попытка заполнить указанный пробел была предпринята в работах *Маракулин (2003, 2016)* где применялся разработанный автором договорной подход (в целом представляющий новую модель совершенной конкуренции). По определению договором может быть любой *допустимый* вектор, реализующий перераспределение продуктов $v = (v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ (это *бартерный контракт*), где v_i — продуктовый набор (вектор) и $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ множество всех агентов; имеем $\sum_{i \in \mathcal{I}} v_i = 0$. Однако не всякое перераспределение можно реализовать в экономике, чему может быть множество причин (физические, институциональные и другие ограничения).

Простейший неполный рынок описывается как модель с двумя временными периодами $t = 0, 1$, в которой имеется l видов продуктов, достижимых сегодня или завтра, где «завтра» представлено посредством s возможных событий будущего. Таким образом полное пространство продуктов это $\mathbb{R}^{l(s+1)}$. В настоящем (момент $t = 0$) существует также рынок «активов» (assets), общим числом k штук. Активы могут быть чисто финансовыми или «реальными», т. е. после их приобретения в единичном объёме обещают отдачу в будущем в виде фиксированных продуктовых наборов. Именно для модели с реальными активами оказалось возможным развить адекватную теорию коалиционного доминирования. Формально активы это векторы

$a^1, a^2, \dots, a^k \in \mathbb{R}^{ls}$, которые как вектор-столбцы образуют $(sl \times k)$ -матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_s^1 & a_s^2 & \dots & a_s^k \end{bmatrix}$$

При заданных ценах $p_\sigma \in \mathbb{R}^l$, $\sigma = 1, \dots, s$, этой матрице отвечает матрица финансовых отдач в будущих состояниях, задаваемая по формуле $\mathfrak{A}(p) = (p_\sigma \cdot a_\sigma^j)_{\substack{\sigma=1, \dots, s \\ j=1, \dots, k}}$. Если $z_i \in \mathbb{R}^k$ — торговая программа по активам i -го агента, то её «отдача» в натуральном выражении составит вектор $Az_i = (A_\sigma z_i)_{\sigma=1, \dots, s}$, а в финансовом — $(\langle p_\sigma \cdot A_\sigma, z_i \rangle)_{\sigma=1, \dots, s}$ (здесь $A_\sigma = (a_\sigma^j)_{j=1, \dots, k}$).

В неполном рынке допустимы только те договоры, которые осуществляют обмены в некотором состоянии мира или реализуются посредством активов — такого рода контракт индивиды могут заключить в «настоящем». Точнее, постулируются следующие правила заключения новых и разрыва уже имеющихся договоров:

- агенты могут разрывать любые договоры;
- в выделенном событии (одном!) $\sigma = 1, \dots, s$ агенты могут заключать новые договоры — обмены по товарам, либо
- в событии $\sigma = 0$ (т. е. в настоящем) они могут заключать новые договоры по «активам» и обменов товарами (в совместном или раздельном режиме).

Таким образом, ситуация разрыва и заключения договоров *несимметрична*, так как потребители могут разрывать любые договоры, а заключать только в *фиксированном* событии мира. Как обычно (характерно для экономической теории в целом) нас будут интересовать стабильные системы договоров (как долгоживущие). Причём было показано, что возможности индивидов связанные с разрывом договоров (наряду с их допустимостью) играют ключевую роль в разрешении вышеуказанной проблемы доминирования. Именно, при определении коалиционного доминирования в *Маракулин* (2003) в состояниях будущего постулировалась возможность разрывать договоры из виртуальных эквивалентных сетей. Поясним далее необходимые понятия теории бартерных договоров, см. *Маракулин* (2003, 2014).

Частичный разрыв договора $v = (v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ в объёме $\alpha \in [0, 1]$ означает, что в системе договоров договор v замещается договором $(1 - \alpha)v$. Система (сеть) договоров называется *правильной*, если никто не заинтересован в частичном разрыве договоров: частичный разрыв (у разных контрактов возможно в разном объёме) не приводит к повышению полезности у какого либо агента. Только правильные сети договоров могут быть долгоживущими. Правильные сети V, W (слабо) эквивалентны, если $\sum_{v \in V} = \sum_{w \in W} \iff V \sim W$. Здесь W называется виртуальной сетью для V .

Распределение $x(V)$, реализуемое сетью договоров V , может обладать разными свойствами стабильности; оно называется:

- *договорным*, если не существует коалиции, которая, разрывая часть договоров и заключая новый допустимый договор, обеспечивает всем своим членам повышение полезности (доминирование);
- *правильно договорным*, если V правильная и для доминирования допускается частичный разрыв договоров;
- *совершенно договорным*, если V правильная и для доминирования может применяться (с последующим разрывом и т. д.) эквивалентная сеть $W \sim V$.

В *Маракулин* (2003) была предложена и изучалась следующая **концепция ядра** неполного рынка. Ядро образуют распределения, реализованные сетью допустимых договоров обладающих свойствами: *Во-первых*, все договоры в будущих состояниях мира являются совершенными, и в настоящем нет такой коалиции, которой было бы выгодно заключить новый контракт. *Во-вторых*, не существует коалиции, которой было бы выгодно выделиться в собственную подэкономику на следующих условиях. Сети договоров для будущих состояний заменяются на виртуальные, часть из которых рвётся, причём обязательно рвутся контракты с нетривиальным участием членов дополняющей коалиции; также разрываются все договоры в настоящем. Тогда коалиция способна найти договор в настоящем такой, что итоговое коалиционное распределение предпочитается каждым из членов коалиции.

В неполных рынках применяется концепция **GEI-равновесия** (General Equilibrium Incomplete); её принципиальное отличие от классического конкурентного равновесия состоит в том, что агенты делают свой выбор при множественности бюджетных ограничений — в каждом возможном событии своё ограничение. Однако эти ограничения не статичны и связаны между собой через торговлю на рынке финансовых активов. Как обычно, в равновесии все рынки (продуктовые и по активам) должны быть сбалансированы. Концепции классического и **GEI-равновесия** становятся эквивалентными только при наличии достаточного числа независимых активов (число состояний будущего). В контексте договорного подхода распределения **GEI-равновесия** описываются подобно распределениям из договорного ядра где, однако, возможности коалиционного доминирования *расширяются* за счёт допущения *частичного разрыва* договоров в настоящем.

При приемлемых технических предположениях в *Маракулин* (2003) было доказано, что введённая концепция (договорного) ядра обладает следующими свойствами:

- Если модель описана как неполный рынок, но при этом является математически эквивалентной классической модели чистого обмена (является полной), то ядро в контексте неполного рынка совпадает с классическим ядром.
- В условиях совершенной конкуренции ядро и равновесие в неполных рынках совпадают: ядро в реплицированной модели стягивается к **GEI-равновесию**.

Именно наличие этих двух свойств позволяет утверждать, что была введена действительно корректная концепция ядра неполного рынка.

Как это видно из вышесказанного, при всех своих достоинствах, имеющаяся концепция договорного ядра представляет собой довольно тяжеловесную и трудно интерпретируемую конструкцию. Этот факт мотивировал продолжение исследований по договорному ядру и равновесию, в результате которых было получено новое и существенно более простое описание **GEI-равновесия**.

В рамках теории бартерных договоров была разработана ещё одна концепция стабильности, это так называемое *нечётко договорное* распределение. Суть её состоит в том, что при доминировании допускается не только равномерный (одинаковый для всех) *частичный* разрыв договоров, но также разрыв может быть *разным у разных агентов*. Таким образом, допускается несимметричный разрыв договоров, в результате которого вектор изменения потребительского набора уже может не быть договором. Несмотря на это агенты пытаются найти новый взаимовыгодный контракт. Распределение, в котором такое взаимовыгодное коалиционное взаимодействие невозможно, называется **нечётко договорным**. Преимущество нечётко договорного распределения по отношению к правильно договорному состоит в том, что планируя договорное взаимодействие индивиды не обязаны координироваться

или как-нибудь информировать других агентов о имеющихся у них планах по частичному разрыву имеющихся договоров. Доказано, что (при слабых технических предположениях) в классическом рынке нечётко договорные распределения совпадают с равновесными, см. *Маракулин (2014)*. В предъявленном исследовании нечётко договорную концепцию удалось распространить на неполные рынки:

Определение. *Распределение $x = (x_i)_{\mathcal{I}}$ называется нечётко договорным, если для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i \in \mathcal{I}$:*

(i) *$t = 0$ (настоящее) для $y_i^0 = x_i^0(V) - \lambda_i v_i^0$, $y_i^\sigma = x_i^\sigma - \lambda_i A_\sigma z_i$, $\sigma = 1, \dots, s$ при распределении $(y_i)_{\mathcal{I}}$ не существует коалиции, способной заключить новый взаимовыгодный договор в состоянии $t = \sigma = 0$.*

(ii) *$t = 1$ (будущее) $\forall \sigma \geq 1$ для $y_i^\sigma = x_i^\sigma - \lambda_i v_i^\sigma$ при распределении $(x_i^{-\sigma}, y_i^\sigma)_{i \in \mathcal{I}}$ не существует коалиции, способной заключить новый взаимовыгодный договор в состоянии $\sigma = 1, \dots, s$.*

Содержательно эти требования говорят о том, что нет такой коалиции, для членов которой (каждого!) было бы выгодно в каком-либо состоянии мира частично разорвать текущий договор (каждый $i \in \mathcal{I}$ в своей мере $\lambda_i \in [0, 1]$), и затем заключить новый договор. При стандартных предположениях неполного рынка (гладкие полезности и т. д.) автором была получена следующая характеристическая

Теорема. *В неполном рынке множество внутренних GEI-равновесий совпадает с множеством нечётко договорных.*

Доказательство этой теоремы весьма нетривиально и в конечном итоге, после надлежащих построений, вопрос сводится к применению теоремы отделимости.

Подобная характеристика для ядра пока что не найдена, но имеется рабочая гипотеза: Коалиция доминирует распределение если либо

- после нечёткого разрыва договоров в одном из будущих событий, в этом событии у членов коалиции найдётся новый взаимовыгодный контракт, либо
- после нечёткого разрыва договоров в событиях из будущего и полного разрыва договоров в настоящем члены коалиции способны в настоящем найти новый взаимовыгодный контракт.

В целом, уже доказанная теорема существенно развивает договорной подход в контексте теории неполных рынков. Представляется, что обоснование описанной гипотезы о характеристике договорного ядра (или её модификации) также способно прояснить кооперативные свойства неполных рынков и представления о совершенной конкуренции.

Список литературы

Magill, M. and W. Shafer (1991). Incomplete markets// *in*: Hildenbrand, W. and H. Sonnenschein (eds.): Handbook of Mathematical Economics, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam, 1523–1614

Маракулин В. М. (2003). Договоры и коалиционное доминирование в неполных рынках// *Консорциум экономических исследований и образования. Серия “Научные доклады”*, №02/04, 114 с.

Marakulin, V. M. Contracts and domination in incomplete markets: what is a true core?, *Economic Theory Bulletin*, **2016**, DOI 10.1007/s40505-016-0105-0, 28 pages

Маракулин В. М. (2014). О договорном подходе в моделях экономики типа Эрроу — Дебре — Маккензи, *Экономика и Математические Методы*, **50**(1), Москва, 2014, с. 61–79