# ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ГЕНЕРАТОРОВ В РЫНОЧНЫХ УСЛОВИЯХ

**Н.В. Дресвянская (dnv90@mail.ru)**

**Аннотация.** В работе рассматривается модель функционирования источников и потребителей электроэнергии в рыночных условиях. Анализируется ситуация, в которой источники электроэнергии начинают манипулировать своими расходными характеристиками с целью максимизации своей прибыли. В результате чего получается некооперативная игра $k$ лиц, для которой доказано существование равновесия по Нэшу. Приводится аналитический вид равновесного решения для случая двух источников.

**Ключевые слова:** модель ЭЭС, механизм ценообразования, манипулирование издержками, некооперативная игра $k$ лиц, равновесие по Нэшу.

### 0. Введение

В работе рассматривается электроэнергетическая система (ЭЭС), состоящая из $m$ узлов и $n$ линий [1,2]. Не уменьшая общности, будем считать, что в первых $k\,(k < m)$ узлах находятся источники электроэнергии (ГЭС, ТЭС, АЭС и т.д.), а в остальных $(m-k)$ - потребители. Перетоки электроэнергии в сети должны удовлетворять первому закону Кирхгофа

$$Ax = b,$$

где $x_j$ - переток по линии $j$,

$b_i$ - генерация в $i-ом$ узле при $i=\overline{1,k}$ или нагрузка в $i-ом$ узле при $i=\overline{k+1,m}$,

$A$ - матрица инцидентности размера $m \times n$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, \text{если } j-\text{ая дуга входит в } i-\text{ый узел}, \\ \ \ 0, \text{если } j-\text{ая дуга не связана с } i-\text{ым узлом}, \\ \ \ 1, \text{если } j-\text{ая дуга выходит из } i-\text{ого узла}. \end{cases}$$

Необходимо отметить, что матрица инцидентности обладает следующим свойством: если $y^T A = 0$, то $y_1 = y_2 = \ldots = y_m$.

Нагрузка потребителей считается постоянной, т.е. $b_i = const,\ i=\overline{k+1,m}$. Генерация электроэнергии источниками определяется функцией издержек

$$c_i(b_i) = \alpha_i b_i^2 + \beta_i b_i + \gamma_i,\ \alpha_i > 0,\ i=\overline{1,k} \tag{1}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ - заданные константы.

В соответствии с существующими нормативами механизм ценообразования выглядит следующим образом. Решается задача выпуклого квадратичного программирования:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(b_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i^2 + \beta_i b_i + \gamma_i \to \min, \tag{2}$$

$$Ax = b. \tag{3}$$

Каждому узлу соответствует своя двойственная переменная, оптимальное значение которой и берется в качестве узловой цены. В соответствии с этими узловыми ценами происходят финансовые расчеты между потребителями и источниками.

В условиях рынка такая схема ценообразования невыгодна с точки зрения источников, поскольку в своей работе они ориентируются на максимум прибыли, а не на минимум суммарных издержек, что и представляет собой задача (2)-(3).

В данной ситуации источники начинают манипулировать своими расходными характеристиками, т.е. параметрами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ в (1) с целью максимизации своей прибыли при ценах, определяемых после решения задачи (2)-(3).

Среди целей работы выделим следующие: выяснить влияние параметра $\beta_i$ ($\alpha_i, \gamma_i$ считаются константами) на прибыль $i-ого$ источника, сформулировать соответствующую некооперативную игру $k$ лиц, исследовать существование равновесия по Нэшу в этой игре.

**1. Математический анализ механизма ценообразования**

Для решения задачи (2)-(3) воспользуемся методом Лагранжа. Составим функцию Лагранжа и минимизируем ее:

$$L = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i b_i^2 + \beta_i b_i + \gamma_i) + \lambda^T (Ax - b) \to \min .$$

Вычислим ее частные производные и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = 2\alpha_i b_i + \beta_i - \lambda_i = 0,\ i = \overline{1,k} \tag{4}$$

$$L_x = \lambda^T A = 0,\ \ L_x = \left( \frac{\partial L}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n} \right)^T . \tag{5}$$

Используя свойство матрицы инцидентности $A$ из (5) получаем, что все цены $\lambda_i$ равны одной и той же цене, которую обозначим $p$

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_m = p . \tag{6}$$

Таким образом, в силу (4) и (6) устанавливается единая цена

$$2\alpha_i b_i + \beta_i = p. \tag{7}$$

Заметим, что величина $2\alpha_i b_i + \beta_i$ есть величина предельных издержек $i-ого$ источника, поскольку $c_i'(b_i) = 2\alpha_i b_i + \beta_i$. Поэтому в оптимальном решении все производители выходят на одинаковый уровень предельных издержек, который и равен установившейся цене.

Таким образом, в рассматриваемой модели все расчеты происходят по единой цене, определяемой текущими издержками источников.

**2. Поведение источников**

Перейдем к описанию прибыли $i-ого$ источника как функции нулевых предельных издержек $\beta_i = c_i'(0)$. С практической точки зрения влияние параметра $\beta_i$ на прибыль наиболее существенно.

Основной целью источника является получение максимальной прибыли

$$pb_i - \alpha_i b_i^2 - \beta_i b_i - \gamma_i \to \max,$$

где $p$ - цена на продаваемую электроэнергию.

Запишем функцию прибыли $i-ого$ источника

$$\Pi_i = pb_i - (\alpha_i b_i^2 + \beta_i b_i + \gamma_i) .$$

С учетом равенства (7) преобразуем полученное выражение

$$\Pi_i = (2\alpha_i b_i + \beta_i) b_i - \alpha_i b_i^2 - \beta_i^0 b_i - \gamma_i = \alpha_i b_i^2 + \beta_i b_i - \beta_i^0 b_i - \gamma_i ,$$

где $\beta_i^0$ - реальные нулевые издержки $i-ого$ источника.

Зная нагрузку в каждом узле, мы можем посчитать общую нагрузку

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k = b_{k+1} + \ldots + b_m = b_T . \tag{8}$$

Выразим из равенства (7) $b_i$ как функцию $p$

$$b_i(p) = \frac{p-\beta_i}{2\alpha_i}. \tag{9}$$

Подставим это выражение в (8)

$$\frac{p-\beta_1}{2\alpha_1} + \frac{p-\beta_2}{2\alpha_2} + \cdots + \frac{p-\beta_k}{2\alpha_k} = b_T$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{p-\beta_i}{2\alpha_i} = b_T.$$

Выразим из последнего равенства $p$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{p}{2\alpha_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{2\alpha_i} = b_T,$$

$$\frac{p}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = b_T \Rightarrow p^*(\beta) = 2\left[\frac{b_T + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}}\right].$$

Заметим, что увеличение параметра $\beta_i$ влечет за собой увеличение $p^*(\beta)$.

Подставим найденную цену $p^*(\beta)$ в (9) при $i = q$ и найдем оптимальный объем генерации каждого источника

$$b_q^*(\beta) = \frac{\dfrac{2b_T + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}} - \beta_q}{2\alpha_q} = \frac{2b_T + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} - \beta_q \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}} \cdot \frac{1}{2\alpha_q},$$

$$b_q^*(\beta) = \frac{2b_T + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i - \beta_q}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}} \cdot \frac{1}{2\alpha_q}.$$

Аналитическое выражение функций прибыли как функций параметров $\beta$ имеет вид

$$\Pi_q(\beta) = K_q \cdot (\beta_q)^2 + l(\beta),\ q = \overline{1,k}, \tag{10}$$

где $l(\beta)$ - линейная относительно $\beta_q$ функция, $K_q$ - некоторая константа.

Стоит отметить, что прибыль $q-го$ производителя зависит не только от собственных нулевых предельных издержек, но и от нулевых предельных издержек других производителей.

Увеличение своих собственных издержек (параметра $\beta_q$) приведет к уменьшению своего собственного выпуска, и тем самым, к увеличению выпуска других участников. В итоге получается некооперативная игра $k$ лиц с функциями выигрыша (10).

**Лемма.** Величина $K_q < 0$.

**Доказательство.** Выделим коэффициент, стоящий перед $\beta_q^2$. Далее путем несложных математических преобразований получаем, что коэффициент $K_q$ строго меньше нуля.

$$K_q = -\frac{1}{4}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\alpha_i}\right)^2\cdot\alpha_q^2 - 1}{\alpha_q^3\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\alpha_i}\right)^2} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_q}{\alpha_i}\right)^2 - 1}{\alpha_q^3\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\alpha_i}\right)^2}\right] = -\frac{1}{4}\left[\frac{\left(1+\sum_{i\neq q}^{k}\frac{\alpha_q}{\alpha_i}\right)^2 - 1}{\alpha_q^3\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\alpha_i}\right)^2}\right] < 0 .$$

Из леммы следует, что каждая функция $\Pi_q(\beta)$ вогнута по $\beta_q$. Из известной теоремы о существовании равновесия следует, что в данной игре существует равновесие по Нэшу.

Для случая двух источников равновесное решение удается получить в аналитическом виде. Запишем функции прибыли для каждого источника

$$\Pi_1(\beta_1,\beta_2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(2b_T + \frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2}\right)^2}{\alpha_1\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta_1\left(2b_T + \frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2}\right)}{\alpha_1\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta_1^0\left(2b_T + \frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2}\right)}{\alpha_1\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)} - \gamma_1,$$

$$\Pi_2(\beta_1,\beta_2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(2b_T + \frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1}\right)^2}{\alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta_2\left(2b_T + \frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1}\right)}{\alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta_2^0\left(2b_T + \frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1}\right)}{\alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)} - \gamma_2 .$$

Рассмотрим коэффициенты, стоящие перед $\beta_1^2$ и $\beta_2^2$

$$K_1 = \frac{1}{4\alpha_1\alpha_2^2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)^2} - \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)} = \ldots = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2},$$

$$K_2 = \frac{1}{4\alpha_2\alpha_1^2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)^2} - \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)} = \ldots = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha_2+2\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}.$$

Для нахождения равновесия продифференцируем $\Pi_1$ по $\beta_1$, $\Pi_2$ по $\beta_2$ и приравняем полученные производные к нулю

$$\frac{\partial\Pi_1(\beta_1,\beta_2)}{\partial\beta_1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta_1(\alpha_1+2\alpha_2)-\beta_2\alpha_2-2b_T\alpha_2^2-\beta_1^0(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial\Pi_2(\beta_1,\beta_2)}{\partial\beta_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta_1\alpha_1-\beta_2(2\alpha_1+\alpha_2)+2b_T\alpha_1^2+\beta_2^0(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} = 0 .$$

Решив данную систему, мы получим аналитический вид равновесного решения

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b_T \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta_1^0 (2\alpha_1 + \alpha_2) + \beta_2^0 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b_T \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta_2^0 (\alpha_1 + 2\alpha_2) + \beta_1^0 \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Поскольку функции выигрыша квадратичны по своим стратегиям, то нахождение равновесия в общем случае сводится к решению системы линейных уравнений.

**3. Заключение**

В ходе работы было получено аналитическое выражение функций прибыли как функций параметров $\beta_q$, $q = \overline{1,k}$. Доказано существование равновесия по Нэшу в получившейся некооперативной игре $k$ лиц. Указан способ нахождения равновесия (решение системы линейных уравнений).

## Список литературы:


1. Нечаев И.А., Паламарчук С.И. Планирование загрузки электростанций в условиях оптового рынка электроэнергии// Изв. РАН. Энергетика. – 2011. – № 6. – С. 71–84.
2. Паламарчук С.И. Планирование двусторонних договоров на поставку электроэнергии в условиях конкурентного оптового рынка // Изв. РАН. Энергетика. – 2011. – № 2. – С.77–91.