Вектор Майерсона для коммуникационных сетей Джексона

Мы рассматриваем игру с трансферабельной полезностью (TU-игру) с ограниченной кооперацией, представленной ненаправленным коммуникационным графом, введённую Майерсоном. Вершины графа представляют игроков, а рёбра представляют связи между игроками. Игроки могут взаимодействовать напрямую только если они связаны. Понятие "связи"при этом может интерпретироваться весьма широко: ее наличие может обозначать передачу информации или ресурсов между игроками, отношения сотрудничества и дружбы, связь может быть транспортной или описывать взаимное влияние и подчиненность. Вершины могут быть отдельными людьми, организациями, странами или веб-страницами. Это приводит к так называемой коммуникационной (сетевой) игре, заданной тройкой, состоящей из конечного множества игроков, характеристической функции и графа. Хорошо известным решением коммуникационной игры является вектор Майерсона. Несмотря на то, что формула выглядит просто, вычисление вектора Майерсона требует больших усилий. Для игры со специальной характеристической функцией нами предложен делёж, найдена производящая функция для его вычисления и доказано, что он совпадает с вектором Майерсона.

Вектор Майерсона

Пусть дана кооперативная игра v с множеством игроков N и граф g. Вершины графа идентифицируются с игроками, а ребро графа ij означает, что игроки i и j могут взаимодействовать напрямую, если и только если $ij \in g$.

Для каждого игрока i, данного графа g и характеристической функции v вектор Майерсона $Y_i\left(v,\ g\right)$ определяется следующими аксиомами:

A1. Если S связный компонент, то сумма выигрышей игроков коалиции S равна ценности всей коалиции, т.е $\forall S \in N|g$

$$\sum_{i \in S} Y_i\left(v,\ g\right) = v\left(S\right). \tag{1}$$

Связный компонент — максимальное связное подмножество. $N|g$ означает множество всех связных компонентов в g.

A2. $\forall g,\ \forall ij \in g$ оба игрока одинаково получают выгоду или теряют от создания связи

$$Y_i\left(v,g\right) - Y_i\left(v,g-ij\right) = Y_j\left(v,g\right) - Y_j\left(v,g-ij\right). \tag{2}$$

Если для любой коалиции S определить характеристическую функцию как

$$v_g\left(S\right) = \sum_{T \in S|g} v\left(T\right),$$

то вектор Майерсона может быть вычислен по формуле

$$Y_i^{MV}\left(v,\ g\right) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \left(v_g\left(S \cup i\right) - v_g\left(S\right)\right) \frac{s!\left(n-s-1\right)!}{n!}, \tag{3}$$

где $s = \left|S\right|,\quad n = \left|N\right|.$

Принцип дележа

Рассмотрим игру, в которой граф является деревом T, состоящим из n вершин, а характеристическая функция задаётся подобно схеме, предложенной Джексоном: каждая прямая связь — путь длиной 1 — приносит игрокам доход r, где $0 \leq r \leq 1$. Кроме того, игроки также извлекают выгоду из косвенных (непрямых) связей, но уже меньшую. За каждый путь длиной 2 коалиция получает r^2, за путь длиной 3 — r^3 и т. д. Для любой коалиции S можно записать

$$v(S) = a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_k r^k + \cdots + a_L r^L = \sum_{k=1}^{L} a_k r^k, \qquad (4)$$

где L — максимальное расстояние между двумя вершинами в данной коалиции;
a_k — число путей длины k в данной коалиции.

$$v(i) = 0, \ \forall i \in N.$$

Пример 1.

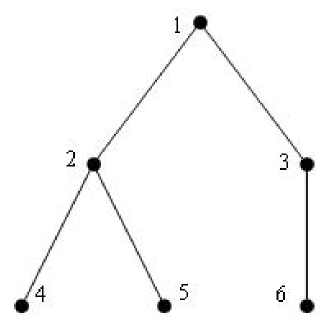

Рис. 1: Дерево 1.

Для дерева на рис. 1 $L = 4$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$. Характеристическая функция для гранд-коалиции равна

$$v(N) = 5r + 5r^2 + 3r^3 + 2r^4.$$

Для коалиции $S = \{1, 2, 4, 5\}$ $L = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$ и характеристическая функция равна

$$v(S) = 3r + 3r^2.$$

Опишем процедуру получения дележа для произвольного игрока i.

Шаг 1. Два напрямую связанных игрока получают r. По отдельности они не получат ничего, поэтому каждый из них вправе рассчитывать на половину, т.е. выигрыш составит $\frac{r}{2}$. Но если игрок участвует в нескольких таких связях, то он получит $\frac{r}{2}$ от каждой. Значит, его выигрыш нужно умножить на количество путей длины 1, содержащих этого игрока.

Шаг 2. Чтобы получить r^2 нужен путь из трёх игроков. Без любого из них коалиция заработает меньше, поэтому каждый из трёх должен получить $\frac{r^2}{3}$ от всех путей длины 2, проходящих через него.

Рассуждая аналогичным образом, и суммируя выигрыши каждого шага, получим делёж:

$$Y_i(v,g) = \frac{\alpha_1(T_i)}{2}r + \frac{\alpha_2(T_i)}{3}r^2 + \cdots + \frac{\alpha_L(T_i)}{L+1}r^L = \sum_{k=1}^{L} \frac{\alpha_k(T_i)}{k+1}r^k, \tag{5}$$

где $\alpha_k(T_i)$ — число путей длины k в дереве T, содержащих игрока i.

Пример 2.

Найдём выигрыш игрока 2 из примера 1. Перечислим все пути, содержащие игрока 2. Пути длиной 1: {1,2}, {2,4}, {2,5}, т.е. $\alpha_1(T_2) = 3$. Пути длиной 2: {1,2,4}, {1,2,5}, {4,2,5}, {2,1,3}, $\alpha_2(T_2) = 4$. Пути длиной 3: {3,1,2,4}, {3,1,2,5}, {2,1,3,6}, $\alpha_3(T_2) = 3$. Пути длиной 4: {4,2,1,3,6}, {5,2,1,3,6}, $\alpha_4(T_2) = 2$. Тогда

$$Y_2 = \frac{3}{2}r + \frac{4}{3}r^2 + \frac{3}{4}r^3 + \frac{2}{5}r^4.$$

Нами доказано, что предложенный делёж (5) удовлетворяет аксиомам A1 и A2, и, следовательно, является вектором Майерсона.

Рассмотрим частный случай. Пусть граф g звезда из n вершин и игрок 1 — центр звезды. Вычислим вектор Майерсона непосредственно по формуле (3).

Для звезды максимальное расстояние между двумя вершинами $L = 2$. Характеристическая функция

$$v(N) = |N-1| \cdot r + C^2_{|N-1|} \cdot r^2.$$

$$\forall S \not\ni 1 \quad v(S \cup 1) = |S| \cdot r + C^2_{|S|} \cdot r^2,$$

$$v(S) = 0.$$

Найдём выигрыш игрока 1.

$$Y_1^{MV}(v,\ g) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v\left(g|_{S\cup 1}\right) - v\left(g|_S\right)\right) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} v\left(g|_{S\cup 1}\right).$$

Выигрыш любой коалиции, содержащей игрока 1, зависит только от количества её членов, а число коалиций из s игроков, не содержащих 1, равно C^s_{n-1}. Учитывая это,

$$Y_1^{MV}(v,\ g) = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{s! \cdot (n-s-1)! \cdot C^s_{n-1}}{n!} \cdot \left(r \cdot s + r^2 \cdot C^2_s\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(r \cdot s + r^2 \cdot C^2_s\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(r \cdot s + r^2 \cdot \frac{s \cdot (s-1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(r \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + r^2 \cdot \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{6}\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \left(r + r^2 \cdot \frac{n-2}{3}\right).$$

Для остальных игроков

$$Y_i^{MV}(v,\ g) = \frac{1}{n-1} \cdot (v(N) - v(1)) =$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \left((n-1) \cdot r + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot r^2 - \frac{(n-1)}{2} \cdot r - \frac{(n-1)(n-2)}{6} \cdot r^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot r + \frac{n-2}{3} \cdot r^2.$$
$$i = 2,\ 3, \ldots, n.$$

Найдём выигрыши игроков по формуле (5)

$$Y_1 = \frac{\alpha_1\left(g_1\right)}{2} \cdot r + \frac{\alpha_2\left(g_1\right)}{3} \cdot r^2 = \frac{n-1}{2} \cdot r + \frac{C_{n-1}^2}{3} \cdot r^2 =$$

$$= \frac{n-1}{2} \cdot r + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{3 \cdot 2} \cdot r^2 = \frac{n-1}{2} \cdot \left(r + r^2 \cdot \frac{n-2}{3}\right).$$

$$Y_i = \frac{\alpha_1\left(g_i\right)}{2} \cdot r + \frac{\alpha_2\left(g_i\right)}{3} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot r + \frac{C_{n-2}^1}{3} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot r + \frac{n-2}{3} \cdot r^2.$$

Выигрыши, вычисленные по формулам (3) и (5), совпадают.

Производящая функция для числа путей

Вычисления по формуле (5) требуют меньших усилий, чем по формуле (3), но всё же для игры с произвольным деревом подсчёт числа путей длины k процесс трудоёмкий. Нами найдена производящая функция для числа путей.

Рассмотрим дерево $T_p = (N, E)$ с корнем в вершине p. Введём в рассмотрение производящую функцию

$$\varphi_{Tp}(x) = \sum_{k=1}^{L} A_k(T_p) x^k$$

где $A_k(T_p)$ — число путей, состоящих из k игроков (длины $k-1$) в дереве T_p, содержащих вершину p.

Вычислим производящую функцию рекуррентно. Вначале определим в финальных вершинах q дерева T_p

$$\varphi_{Tq}(x) = x.$$

Обозначим l число игроков на максимальном пути $\{p, \ldots, q\}$. Рассмотрим вершины дерева q, для которых число игроков на пути $\{p, \ldots, q\}$ равно $l-1$. Если это не корень p, положим

$$\varphi_{Tq}(x) = x\left(1 + \sum_{i=1}^{d} \varphi_{Tq_i}(x)\right) \tag{6}$$

где сумма берётся по всем потомкам $q_i, i = 1, \ldots, d$ вершины q. Так продолжаем до тех пор, пока $l = 2$.

При $l = 2$ производящая функция будет определена для всех потомков вершины p. Теперь положим

$$\varphi_{Tp}(x) = x\left(1 + \sum_{i=1}^{d} \varphi_{Tq_i}(x) + \sum_{i \neq j} \varphi_{Tq_i}(x)\varphi_{Tq_j}(x)\right) \tag{7}$$

где сумма берётся по всем потомкам $q_i, i = 1, \ldots, d$ вершины p.

Доказательство основано на следующих соображениях. Пусть $q_1, \dots, q_d$ — потомки вершины $q \neq p$. Тогда любой путь из q в вершину s в дереве T_q проходит через одну из вершин q_i, при этом разница в длинах пути составляет единицу.

Если же $q = p$, то к путям из k игроков, которые начинаются из вершины p, нужно добавить ещё пути из k игроков, которые проходят через p и могут быть составлены из путей, состоящих из $k_1 \leq k-1$ игроков в дереве T_{q_i} и путей, состоящих из $k-1-k_1$ игроков в дереве T_{q_j}, где $i \neq j$. Число таких составных путей и определяется из произведения во второй сумме выражения (7).

<u>Пример 3</u>.

Для дерева из примера 1 для первого игрока получим

$\varphi_{T_4}(x) = \varphi_{T_5}(x) = \varphi_{T_6}(x) = x;$

$\varphi_{T_2}(x) = x(1 + \varphi_{T_4}(x) + \varphi_{T_5}(x)) = x(1 + 2x);$

$\varphi_{T_3}(x) = x(1 + \varphi_{T_6}(x)) = x(1 + x);$

$\varphi_{T_1}(x) = x(1 + \varphi_{T_2}(x) + \varphi_{T_3}(x) + \varphi_{T_2}(x)\varphi_{T_3}(x)) = x + 2x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5.$

Т.е. $\alpha_1(T_1) = A_2(T_1) = 2;$

$\alpha_2(T_1) = A_3(T_1) = 4;$

$\alpha_3(T_1) = A_4(T_1) = 3;$

$\alpha_4(T_1) = A_5(T_1) = 2.$

Получим выигрыш первого игрока

$$Y_1 = \frac{2}{2}r + \frac{4}{3}r^2 + \frac{3}{4}r^3 + \frac{2}{5}r^4.$$