Журнал НЭА,
№ 1 (70), 2026,
с. 12–46

Ф.Л. Зак
ЦЭМИ РАН, Москва

Задача о разделе имущества: в поисках справедливого механизма[1]

Аннотация. В игре Нэша о разделе доллара (DD) между n участниками разыгрывается имущество стоимостью E. Игроки одновременно называют размер выигрыша, на который они претендуют. Если сумма их требований не превышает E, то каждый получает запрашиваемое; в противном случае – никто ничего не получает. Множество равновесий по Нэшу в игре DD совпадает с симплексом разбиений E в сумму n неотрицательных слагаемых. Однако интуитивно ясно (и эксперименты это подтверждают), что раздел имущества на равные части является наиболее разумным и справедливым. Множество статей посвящено тому, чтобы на уровне математических моделей найти выход из этого противоречия. Благодаря своей простоте игра DD послужила прототипом большого числа задач, при решении которых возникает необходимость модифицировать стандартный инструментарий математической экономики (функции полезности, различные варианты понятия равновесия), с тем чтобы объяснить эмпирические данные, отражающие, как считается, понимание участниками идеи справедливости. В обзоре рассматриваются различные модификации игры DD, в том числе основанные на неэгоистических предпочтениях и правилах банкротства. Рассматриваются равновесия по Нэшу и по Канту (мультипликативные и аддитивные), модели с ограниченными требованиями и со штрафами, а также предпочтения с различными степенями моральности и отвращения к неравенству.

Ключевые слова: *задача о разделе доллара, задача о банкротстве, правило банкротства, равновесие по Нэшу, равновесие по Канту, отвращение к неравенству, homo moralis.*

Классификация JEL: C02, C62, C65, C78, D61, D62, D63.

Для цитирования: **Зак Ф.Л.** (2026). Задача о разделе имущества: в поисках справедливого механизма // *Журнал Новой экономической ассоциации.* № 1 (70). С. 12–46.

DOI: 10.31737/22212264_2026_1_12-46

EDN: TLSTWX

Введение

Более семидесяти лет назад Дж. Нэш дал определение игры, получившей позже название *Нэшевской игры спроса* (NDG) (Nash, 1953)). Простейшим частным случаем этой игры является игра «Подели доллар» (DD), которая в случае n игроков (Нэш рассматривал случай $n = 2$) состоит в следующем. Игроки одновременно называют долю от разыгрываемой суммы в 1 доллар ($1), на которую они претендуют[2]. Если сумма их требований не превышает $1, то каждый получает запрашиваемое, в противном случае – никто ничего не получает. Эта простая игра интересна тем, что, с одной стороны, коллективное наказание побуждает игроков к достижению некоторого соглашения, а с другой – оценка достигнутого соглашения разная у разных участников. Множество равновесий Нэша в игре DD совпадает со всей границей Парето, т.е. с единичным симплексом. Это вызывает некоторое разочарование, поскольку интуитивно ясно (и подтверждается экспериментально в (Nydegger, Owen, 1975; Roth, Malouf, 1979)), что, в отсутствие

[1] Автор благодарен В.М. Полтеровичу за полезные обсуждения и конструктивную критику и анонимному рецензенту за исключительно внимательное чтение статьи и ценные замечания, позволившие улучшить изложение.

[2] Во время написания статьи покупательная способность доллара была примерно в 13 раз больше, чем сейчас.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

информации об игроках, раздел доллара на равные части является наиболее разумным и справедливым.

Простота формулировки и возможность экспериментальной проверки, ставящей под сомнение рациональность поведения участников (понимаемую в узком, эгоистическом смысле), сделали игру DD столь же популярной у психологов и экономистов, как такие известные игры, как «Дилемма заключенного», «Ультиматум» и «Диктатор». Начиная с самого Нэша, многие экономисты делали попытки изменить условия задачи DD так, чтобы уменьшить число равновесий и подчеркнуть исключительный характер эгалитарного распределения. При этом исследовались вероятностные подходы, деление игры на несколько стадий, введение дополнительных параметров и т.д. В этом обзоре мы, в основном, рассматриваем два класса модификаций задачи DD. Первая состоит в изменении функций полезности игроков с целью сделать их менее эгоистическими. Действительно, здравый смысл и эксперименты подсказывают, что в рассматриваемых нами классах игр нецелесообразно слишком завышать свои требования. Разумнее учитывать в целевой функции выигрыш партнера и даже до какой-то степени отождествлять партнера с собой. Другое возможное объяснение результатов экспериментов состоит в том, что участники игр, выигрыш в которых слабо зависит от умений игроков, испытывают отвращение к неравенству и включают это отвращение в свои целевые функции. Исследование равновесий Нэша в играх с модифицированными функциями полезности позволяет в некоторой степени смоделировать поведение игроков в экспериментах и выявить особую роль эгалитарного распределения.

Другая модификация задачи DD состоит в том, чтобы отменить или хотя бы ослабить слишком суровое наказание за избыточные совокупные требования. Этот подход был впервые с разных сторон исследован в статье (Brams, Taylor, 1994), в которой авторы предположили, что разумная (reasonable) схема распределения выигрышей должна удовлетворять пяти условиям. Самое важное из них, четвертое: «*Если сумма требований игроков больше 1 долл., то 1 долл. целиком распределяется между ними*». Именно это условие не выполняется в игре DD (в которой в этом случае ни один из игроков ничего не получает). Разумные правила распределения выигрышей, рассматриваемые в настоящем обзоре, пришли из задачи о банкротстве. Классическая проблема банкротства возникает, когда средств заемщика или банка недостаточно для выполнения обязательств перед займодателями или вкладчиками и необходимо решить, как распределить имеющиеся средства. Однако нередко возникает и более общая задача, когда вектор требований $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ не фиксирован в договоре, а определяется стратегией участников, причем организатор игры не имеет возможности проверить обоснованность этих требований. Если совокупные требования участников $C=\sum_{i=1}^{n} c_i$ не превосходят призового фонда E (в задаче DD имеем $E=\$1$), то каждый из участников получает запрашиваемое, в противном случае — призовой фонд делится между участниками согласно *правилу банкротства* $R=R(\mathbf{c};E)=(R_1(\mathbf{c}),\ldots,R_n(\mathbf{c}))$, где $0\le R_i(\mathbf{c})\le c_i$ и $\sum_{i=1}^{n} R_i(\mathbf{c})=E$ (это и есть четвертое правило Брэмса–Тэйлора). Мы описываем основные правила банкротства и исследуем равновесия по Нэшу в задаче о банкротстве с ограниченными ставками и в семействах игр со штрафами. Однако известно, что равновесия по Нэшу имеют ряд недостатков, в част-

Журнал НЭА,
№ 1 (70), 2026,
с. 12–46

ности, они не обязательно эффективны. Да и вообще уместность использования равновесий по Нэшу в задачах, в которых подразумевается кооперативное поведение участников, вызывает сомнение. В задачах о банкротстве разумной альтернативой нэшевскому равновесию является равновесие по Канту, введенное в работах Дж. Ремера. В обзоре определяется мультипликативное и аддитивное кантовское равновесие в задачах о банкротстве. Эгалитарное распределение всегда является таким равновесием, и мы исследуем его единственность в зависимости от выбранного правила банкротства.

Вопрос, что такое справедливость, волнует человечество на протяжении тысячелетий, и современная наука едва ли может дать на него ответ (впрочем, в пп. 2.4.4 мы обсуждаем соответствующие эмпирические данные для правил банкротства). Однако большинство исследователей согласны с тем, что в принятии агентами решений большую роль играет их понимание справедливости и способность поставить себя на место партнера. В настоящем обзоре будет рассказано о попытках учесть эти иррациональные характеристики агентов в математических моделях и выяснить, какие модификации целевых функций и понятий равновесия в большей степени соответствуют эмпирическим данным.

1. Структура и краткое содержание статьи

В разд. 2 приводятся некоторые естественные аксиомы для правил банкротства и обсуждаются важные примеры таких правил, а именно классическое пропорциональное правило P, распределяющее имущество E пропорционально требованиям игроков, правило ограниченно равных вознаграждений CEA (constrained equal awards), распределяющее E между участниками поровну, насколько это возможно при условии, что никто не получает больше, чем требует, двойственное ему правило ограниченно равных убытков (constrained equal losses, CEL), распределяющее убыток (разницу между совокупными требованиями C и имуществом E) поровну между участниками, насколько это возможно при условии, что ни у кого нельзя изымать собственных средств, и являющееся их комбинацией талмудическое правило T. В конце раздела сравниваются основные правила банкротства и обсуждается экспериментальная оценка их справедливости.

В разд. 3, следуя статье (Ashlagi et al, 2012), мы переходим к исследованию равновесий Нэша для правил банкротства, удовлетворяющих не слишком ограничительным аксиомам, но при условии, что требования всех игроков находятся в диапазоне $[0, E]$, где E — стоимость распределяемого имущества (в случае раздела доллара $E = \$1$). Оказывается, что при этом, на первый (но только на первый!) взгляд, невинном, ограничении эгалитарный вектор $\mathbf{e} = (E/n, \ldots, E/n)$ всегда является нэшевским равновесием. При этом для многих правил банкротства, например пропорционального и ограниченно равных убытков, $\mathbf{e}$ — единственное равновесие, а для правила ограниченно равных вознаграждений — равновесий бесконечно много.

В игре DD наказание за избыточные совокупные требования участников экстремально сурово, а в играх, основанных на различных правилах банкротства, такое наказание отсутствует. Естественно рассмотреть промежуточные варианты. В статье (Karagözoğlu, Keskin, Sağlam, 2023), на которой основан разд. 4, игра DD вкладывается в семейство игр $\mathrm{DD}_\alpha(n, R)$ (где $R = R(\mathbf{c})$ — правило банкротства), зависящих от параметра $\alpha \in \mathbb{R}_+$, управляющего суровостью наказания.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Точнее говоря, при $C>1$ между участниками распределяется не один доллар, а меньшая сумма $E=E(\alpha,C)=(1-\alpha(C-1))_{+}=\max\{1-\alpha(C-1),0\}$ (мы сохранили для этой суммы обозначение E, поскольку именно она реально распределяется между участниками). Другими словами, штрафом (или налогом) с коэффициентом α облагаются избыточные (превосходящие доллар) требования участников, и с возрастанием α сумма, распределяемая между участниками, уменьшается. Если $\alpha=0$, то \$1 полностью распределяется между игроками, так что мы получаем обычную задачу о банкротстве, а при $\alpha=\infty$ (или, для заданного $C>1$, при $\alpha\geq 1/(C-1)$) игра DD_{α} сводится к игре DD. Кроме того, предполагается, что $0\leq c_i\leq 1$, т.е. зная, что распределяется \$1, ни один игрок не требует большей суммы. Равновесие по Нэшу называется *эффективным*, если для него $E=1$, т.е. отсутствуют штрафы и \$1 целиком распределяется между игроками. Оказывается, что при $\alpha\in(0,\infty)$ для правила ограниченно равных вознаграждений существует единственное эффективное нэшевское равновесие, а именно $\mathbf{e}=(1/n,\ldots,1/n)$. Иначе обстоит дело для наиболее распространенного пропорционального правила. В этом случае существование эффективного равновесия зависит от соотношения между α и числом игроков n, а именно при $\alpha>0$, $n>\alpha+1$ эффективные равновесия отсутствуют, а при $n\leq\alpha+1$ все нэшевские равновесия эффективны и описываются условиями $c_i\geq 1/(\alpha+1)$, $i=1,\ldots,n$. В частности, при $n=\alpha+1$ существует единственное нэшевское равновесие $\mathbf{e}=(1/n,\ldots,1/n)$. Таким образом, по мере возрастания α от 0 до ∞, множество нэшевских равновесий в игре $\mathrm{DD}_{\alpha}(n,P)$ расширяется от эгалитарного до множества нэшевских равновесий в игре DD, т.е. множества разбиений единицы на n частей.

В разд. 5, применительно к модельной задаче DD, обсуждаются две простые модели, построенные с целью учесть влияние общественной сущности человека (homo socialis) на его экономическое поведение (homo oeconomicus). Приводится два способа модификации функций полезности участников, с тем чтобы учесть не только собственную выгоду, но и интересы партнера (для простоты мы рассматриваем случай $n=2$). Первый способ — альтруистические предпочтения — восходит к Эджуорту (Edgeworth, 1881). Согласно такому подходу, если $\pi(c_1,c_2)$ выигрыш первого игрока при профиле стратегий $\mathbf{c}=(c_1,c_2)$, то полезность первого игрока имеет вид $u_1(c_1,c_2)=\pi(c_1,c_2)+\alpha_1\pi(c_2,c_1)$, где $0\leq\alpha_1\leq 1$ степень его альтруизма, т.е. вес, который он придает выигрышу партнера. Аналогично для второго игрока. Этот подход привлекает своей простотой, и можно было бы надеяться, что альтруистический учет интересов партнера сузит множество равновесий и приблизит его к эгалитарному распределению. Однако это не так. Множество нэшевских равновесий в игре двух лиц со степенями альтруизма α_1,α_2 такое же, как в игре DD эгоистичных игроков, а именно состоит из всех пар (c_1,c_2), для которых $c_1,c_2\geq 0$ и $c_1+c_2=1$.

В работе (Fehr, Schmidt, 1999) (см. также (Juan-Bartoli, Karagözoğlu, 2024a, § 6)) сделана попытка объяснить заботу о партнере спецификой функций полезности, которые отражают присущее игрокам отвращение к неравенству. В нашей ситуации функция полезности первого игрока имеет вид $u_1(c_1,c_2)=\pi(c_1,c_2)-\alpha_1(\pi(c_2,c_1)-\pi(c_1,c_2))_{+}-\beta_1(\pi(c_1,c_2)-\pi(c_2,c_1))_{+}$, где $\pi(c_1,c_2)$ — выигрыш при профиле требований (c_1,c_2), α_1 — степень отвращения первого игрока к своему отставанию от партнера, $0\leq\beta_1\leq\alpha_1\leq 1$ — степень отвращения первого

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

игрока к своему превосходству над партнером и, для вещественного числа a, $a_+ = \max\{a, 0\}$. Для второго игрока функция полезности определяется аналогично. Оказывается, что в этой ситуации много нэшевских равновесий, в которых $C = c_1 + c_2 > 1$ и стало быть $\pi(c_1, c_2) = \pi(c_2, c_1) = 0$, т.е. выигрыши обоих участников нулевые. Однако при некоторых ограничениях удается описать множество эффективных нэшевских равновесий (для которых $c_1 + c_2 = 1$). Это множество всегда содержит эгалитарный профиль $(1/2,\ 1/2)$ и, по мере возрастания нетерпимости игроков к неравенству, оно к нему сжимается. Таким образом, достаточный уровень отвращения к неравенству исключает неэгалитарные эффективные нэшевские равновесия, но появляются плохие неэффективные равновесия с нулевыми выигрышами.

Обе модели, рассматриваемые в разд. 5, обобщаются на случай любого числа игроков. Для альтруистических предпочтений это очевидно, а в случае отвращения к неравенству возможны несколько вариантов, например отвращение к отставанию от или к превышению среднего арифметического от ставок остальных участников. Можно также проводить сравнение с максимальной или минимальной ставками. В последнем случае поведение участников не зависит от их отношения к конкретным партнерам, а определяется пониманием социальной справедливости.

Если в моделях разд. 5 homo socialis озабочен не только своим выигрышем, но и выигрышем партнера, то в разд. 6 homo moralis как бы раздваивается — в нем, с некоторыми весами, поселяются две личности — эгоистичный homo oeconomicus и homo kantiensis, руководствующийся категорическим императивом Канта: предпринимать следует только универсализуемые действия, т.е. такие, что если все будут действовать так же, то мир станет лучше.

Кантовская парадигма приобрела новое воплощение в математической экономике полвека назад (см. (Laffont, 1975)), но особенно яркое развитие получила в работах Ремера, подытоженных в монографии (Roemer, 2019). Однако Ремер и его последователи отказались от нэшевской оптимизации и предложили заменить ее кантовской (этот подход рассматривается в разд. 7). В противовес кантовской оптимизации Лаффона–Ремера, при которой игрок полагает, что партнеры будут действовать так же, как он сам, концепция кантовской моральности, предложенная в (Alger, Weibull, 2013) и развитая в (Juan-Bartoli, Karagözoğlu, 2024a), предполагает инкорпорирование в функцию полезности игрока выигрыша партнера при условии, что тот будет применять ту же стратегию. В случае игры DD с двумя участниками это означает, что функция полезности первого игрока имеет вид $u_{k_1}(c_1, c_2) = (1 - k_1)\pi(c_1, c_2) + k_1\pi(c_1, c_1)$, где $\pi(c_1, c_2)$ — материальный выигрыш при профиле требований (c_1, c_2), а $0 \le k_1 \le 1$ — степень моральности первого игрока (для второго игрока, имеющего степень моральности $0 \le k_2 \le 1$, функция полезности устроена аналогично). Таким образом, чем больше k_i, тем в большей степени игрок i руководствуется принципами (кантовской) морали; если $k_i = 0$, то игрок i эгоистичен, а при $k_i = 1$ он оптимизирует свой выбор, предполагая, что партнер выбирает ту же стратегию, что и он.

Мы начинаем с исследования множества равновесий по Нэшу в игре двух лиц с описанными выше функциями полезности в зависимости от соотношения степеней моральности k_1 и k_2, которые трактуются как инструменты управления,

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

причем особое внимание уделяется эгалитарному распределению $(1/2,\ 1/2)$ и важным частным случаям (игроки с одинаковой степенью моральности, эгоист против морального игрока).

Далее рассматривается популяция, состоящая из агентов двух типов, причем доля агентов первого типа со степенью моральности $0 \le \underline{k} < 1$ составляет $0 < p < 1$, а степень моральности остальных агентов (их доля $1 - p$) равна $\overline{k} > \underline{k}$. Все агенты осведомлены о величинах p, $\underline{k}$ и $\overline{k}$, но когда два случайным образом выбранных агента участвуют в игре DD, им известен только свой тип, но не тип партнера. В соответствующей байесовской игре вводится понятие нэшевского равновесия в симметричных чистых стратегиях и исследуются свойства равновесий в зависимости от соотношения $\underline{k}$ и $\overline{k}$. Полное описание всех равновесий удается получить в случае, когда $\underline{k} = 0$, т.е. игроки первого типа эгоистичны. Заметим, что и в этой постановке эгалитарное распределение является равновесием и занимает особое место в множестве равновесных байесовских стратегий.

Здесь уместно сделать терминологическое замечание. Термин *homo moralis* введен в (Alger, Weibull, 2013) и использовался в дальнейших работах, посвященных аналогичным моделям. Но из-за неоднозначности и расплывчатости понятия *мораль* возникает неоднозначность атрибуции и путаница между *homo moralis* и *homo socialis*. В этой статье мы следуем традиции понимать под моральным поведением следование *моральной максиме*, т.е. правилу поведения, которому свойственна предельная общность и обязательность. Говорить об универсальности моральной максимы имеет смысл лишь в моделях, в которых число участников n превосходит 2. Часть результатов статьи (Alger, Weibull, 2013) распространена на этот случай в работе (Alger, Weibull, 2017) и, применительно к задаче DD, в (Juan-Bartoli, Karagözoğlu, 2024b) с использованием вероятностной версии кантианской моральности, которая подразумевает анонимность, т.е. одинаковое отношение каждого игрока i ко всем партнерам, причем полезность игрока определяется его ставками в воображаемой игре DD, в которой часть партнеров сохраняет свои ставки, а оставшиеся заменяют их на c_i. Согласно (Alger, Weibull, 2017), соответствующие слагаемые функции полезности характерны для homo moralis. В этом смысле говорить о моральности в модели с альтруистическими предпочтениями с n участниками можно только если все коэффициенты α_i равны между собой. Что касается модели с отвращением к неравенству, то, хотя в ней и присутствуют какие-то черты моральности участников, но полезность участника i зависит не напрямую от ставок партнеров, а от разностей между ними и c_i, да и цель уменьшения неравенства скорее имеет социальный, а не моральный характер. Однако ясно, что (почти) в каждом человеке скрыты (в разных пропорциях) homo oeconomicus, homo socialis и homo moralis, терминология еще не очень устоялась и практически любое словоупотребление может быть подвергнуто критике.

В разделах, содержание которых мы описывали до сих пор, рассматривались разнообразные модификации игры DD и исследовались множества равновесий относительно нэшевской оптимизации. Поскольку реальное поведение игроков в такого рода задачах нельзя адекватно описать на основе эгоистического поведения игроков, для объяснения кооперативного поведения нам приходилось предполагать, что полезность игрока так или иначе зависит от полез-

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

ностей его партнеров. Однако использование нэшевской оптимизации иногда приводит к неприятным результатам — например равновесие по Нэшу может оказаться неэффективным. Да и стратегия максимизировать свой выигрыш, предполагая, что партнер бездействует, далеко не всегда представляется разумной. В цикле работ Дж. Ремера систематически исследуется понятие кантовской оптимизации, состоящей в том, что агент совершает какое-либо действие только в том случае, если аналогичные действия всех других участников приведут к улучшению его положения. Кантовские равновесия обладают рядом преимуществ по сравнению с нэшевскими; в частности, равновесные распределения эффективны по Парето. В разд. 7 рассматривается задача раздела имущества E между n кантовскими участниками в рамках задачи о банкротстве. Большая часть материала в этом разделе, основанном на статье (Dizarlar, Karagözoğlu, 2023), посвящена *мультипликативному кантовскому равновесию* (МКР). Профиль $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ является МКР, если для всех $i=1,\ldots,n$ и всех $\alpha>0$ выполнено неравенство $R_i(\mathbf{c};E)\geq R_i(\alpha\mathbf{c};E)$, т.е. ни одному из игроков не выгодно изменить свою ставку при условии, что партнеры изменят свои ставки таким же образом (во столько же раз). В игре DD каждый профиль $\mathbf{c}$, для которого $\sum_i c_i = E$, равновесен и по Нэшу, и по Канту. Однако в общем случае кантовское равновесие имеет преимущество — если правило банкротства удовлетворяет весьма слабым ограничениям, то все эгалитарные профили $\alpha\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}=(1/n,\ldots,1/n)$, а $\alpha\geq 1$ являются для него кантовскими равновесиями. Множество неэгалитарных кантовских равновесий зависит от правила банкротства. Для пропорционального правила P каждый профиль $\mathbf{c}$ является равновесием по Канту. Оказывается, что пропорциональное правило является по существу единственным источником множественности кантовских равновесий в задаче о банкротстве: если для всякого неэгалитарного вектора требований $\mathbf{c}$ найдутся $\alpha>0$ и игрок i такие, что $\alpha C\geq E$ и $R_i(\alpha\mathbf{c},E)\neq P_i(\alpha\mathbf{c},E)$, то все кантовские равновесия в задаче о банкротстве с правилом R и имуществом E эгалитарны. Отсюда можно заключить, что для большинства реально встречающихся правил банкротства не существует неэгалитарных кантовских равновесий.

Профиль $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ является *аддитивным кантовским равновесием* (АКР), если для всех $i=1,\ldots,n$ и всех $\alpha\in\mathbb{R}$, для которых $\mathbf{c}+\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha,\ldots,\alpha)$ допустимый профиль, выполнено неравенство $R_i(\mathbf{c};E)\geq R_i(\mathbf{c}+\boldsymbol{\alpha};\ E)$, т.е. ни одному из игроков не выгодно изменить своей ставки при условии, что партнеры изменят свои ставки таким же образом (на столько же). Как и в случае МКР, всякое АКР эффективно, и, при слабых ограничениях, эгалитарные профили вида $\mathbf{e}+\boldsymbol{\alpha}$, $\alpha\geq 0$ являются АКР. Роль пропорционального правила банкротства в случае АКР играет правило *CEL* ограниченно равных убытков, при котором убыток (разница между совокупными требованиями и имуществом E) по возможности поровну распределяется между участниками (подробнее см. пп. 2.3.3), а именно для правила *CEL* каждый допустимый профиль $\mathbf{c}$ является АКР. Оказывается, что если на всех неэгалитарных профилях правило банкротства отлично от *CEL*, то АКР исчерпываются векторами равных требований.

Таким образом, как в мультипликативном, так и в аддитивном случае, эгалитарное распределение является равновесием по Канту для большинства пра-

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

вил банкротства, а степень неоднозначности равновесия в зависимости от правила банкротства находится под контролем.

2. Задача о банкротстве

Один из способов исследования игры DD состоит в том, чтобы включить ее в семейство родственных, хотя, на первый взгляд, и не очень похожих на нее игр, связанных с банкротством. В таких играх имущество E распределяется между n участниками, из которых игрок i предъявляет требование на получение определенной суммы c_i, $i=1,\dots,n$, причем в отличие от классической задачи о банкротстве эти требования не обязательно являются обоснованными — их можно рассматривать как ставки в (некооперативной) игре. Если $C=\sum_i c_i \le E$, то каждый получает требуемое, в противном же случае E распределяется согласно некоторому *правилу банкротства* R, а именно игрок i получает сумму $R_i = R_i(\mathbf{c},E)$, где $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)$, $0 \le R_i(\mathbf{c},E) \le c_i$ и $\sum_i R_i = R_i(\mathbf{c},E)$. Игра DD тоже описывается похожей схемой: в ней $R_i = 0$ для всех $i=1,\dots,n$, но это крайний случай, и наказание участников за жадность представляется чрезмерным. В отличие от DD в играх с правилами банкротства предполагается, что $\sum_i R_i(\mathbf{c};E) = E$, т.е. между участниками распределяется все имеющееся имущество E. В этом разделе мы опишем некоторые наиболее часто применяемые правила банкротства и сформулируем аксиомы, выполняющиеся для таких правил. Развернутое введение в теорию правил банкротства дается в книге (Thomson, 2019).

2.1. Игра заявок и правила банкротства

В *игре заявок* (claim game) Γ денежная сумма (имущество) $E>0$ (в задаче DD полагаем $E=\$1$) распределяется между n игроками $1,\dots,n$, причем предпочтения игроков строго монотонны по отношению к их выигрышам (т.е. к доле имущества E, которую они получают). Стратегия игрока i состоит в предъявлении требований на сумму $c_i \ge 0$. Таким образом, вектор стратегий $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)$ содержится в ортанте $K=\mathbb{R}^n_+$ (в некоторых вариантах постановки задачи считается, что $K=[0,M]^n$ — это куб с ребром M). Выигрыши определяются *правилом распределения* $F: K\times\mathbb{R}_+ \to S$, где $S=\{(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}^n_+ \mid s_1+\dots+s_n=E\}$ — симплекс разбиений, а $F_i(\mathbf{c};E)$, $i=1,\dots,n$ — выплаты, полученные игроком i при выборе стратегии $\mathbf{c}$. Поскольку речь идет о деньгах, каждый игрок хотел бы получить бóльшую сумму, так что исход игры $F(\mathbf{c};E)$ *эффективен по Парето* если и только если $\sum_{i=1}^n F_i(\mathbf{c};E)=E$. Естественно считать, что если $C=\sum_{i=1}^n c_i \le E$, то $F_i(\mathbf{c};E)=c_i$ для всех $1\le i\le n$. Согласно правилам задачи DD, если $C>E$, то $F_i(\mathbf{c};E)=0$, $1\le i\le n$, но такое наказание за несогласованность требований участников представляется слишком суровым и естественно исследовать более широкий класс функций распределения F. Предлагается рассматривать случай $C\ge E$ как *проблему банкротства*, возникающую, например, когда средств обанкротившегося банка или предприятия не хватает для погашения задолженности перед кредиторами или когда наследственного имущества недостаточно для исполнения завещания.

Определение 1. *Правило банкротства* $R=R(\mathbf{c};E)$ — это отображение, сопоставляющее каждому вектору запросов $\mathbf{c}$, для которого $C=\sum_{i=1}^n c_i \ge E$, вектор выгрышей $R(\mathbf{c};E)\in\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющий условиям $\sum_{i=1}^{n} R_i(\mathbf{c};E)=E$ (эффективность) и $0\le R_i(\mathbf{c};E)\le c_i$, $i=1,\ldots,n$. Игра Γ с правилом распределения F, где

$$F_i=\begin{cases} c_i, & \text{если } C\le E;\\ R_i(\mathbf{c},E), & \text{если } C>E,\end{cases}$$

$i=1,\ldots,n$, обозначается $\Gamma(R)$.

При применении правила банкротства $R(\mathbf{c};E)$ участники терпят убытки в размере $R^*(\mathbf{c};E)=\mathbf{c}-R(\mathbf{c},E)$.

Определение 2. Правило R^*, распределяющее выигрыши так же, как R распределяет убытки (т.е. $R^*(\mathbf{c};E)=\mathbf{c}-R(\mathbf{c},C-E)$), называется *двойственным* к R. Правило R называется *самодвойственным*, если $R^*=R$.

2.2. Аксиомы правил банкротства

Приведем некоторые аксиомы, которым удовлетворяют многие популярные правила банкротства. Обсуждение более широкого списка аксиом можно найти в книге (Thomson, 2019).

Реальные правила банкротства делают различия между кредиторами (например, рассматривают *кредиторов разных очередей*), мы же будем предполагать, что участники, предъявляющие одинаковые требования, получают равное вознаграждение (аксиома *равного отношения к равным* (equal treatment of equals, ETE)).

Аксиома ETE. *Если* $c_i=c_j$ *для некоторых* $1\le i,j\le n$, *то* $R_i(\mathbf{c};E)=R_j(\mathbf{c};E)$.

Естественно считать, что по мере возрастания стоимости имущества выигрыши участников не убывают; это аксиома *монотонности по имуществу* (estate monotonicity, EMON).

Аксиома EMON. *При фиксированных требованиях* $\mathbf{c}$ $R(\mathbf{c};E)$ – *неубывающая функция от* E.

Другая естественная, но уже более спорная аксиома — это аксиома *монотонности по требованиям* (claims monotonicity, CMON), согласно которой, при прочих равных условиях, увеличение требований не ухудшает положения участника. Пусть $(c'_i,\mathbf{c}_{-i})$ — вектор запросов, в котором запрос участника i равен c'_i, а запросы всех остальных участников такие же, как в $\mathbf{c}$.

Аксиома CMON. *Для всякого* $1\le i\le n$ *и всякого* $c'_i\ge c_i$ *имеем* $R_i((c'_i,\mathbf{c}_{-i});E)\ge R_i(\mathbf{c};E)$.

Эта аксиома не вызывает особых возражений, если речь действительно идет о банкротстве банка, но в общем случае правило банкротства не обязательно поощряет завышенных требований участников (например, в задаче DD это не так).

Еще одна аксиома, связывающая порядок вознаграждений с порядком требований, — это аксиома *сохранения порядка выигрышей* (order preservation of awards, OPA), являющаяся ослаблением аксиомы, предложенной в статье (Aumann, Maschler, 1985). Согласно этой аксиоме, вознаграждения должны быть упорядочены в соответствии с порядком требований.

Аксиома OPA. *Для всех* $1\le i,j\le n$, *для которых* $c_i\le c_j$, *выполняется неравенство* $R_i(\mathbf{c};E)\le R_j(\mathbf{c};E)$.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Последняя из аксиом, относящихся к достаточно общей ситуации, а именно аксиома *неподвластности* (nonbossiness, NB), была сформулирована в статье (Satterthwaite, Sonnenschein, 1981) в контексте теории социального выбора. Смысл этой аксиомы в том, что если участник не может воздействовать на свой выигрыш, модифицировав свое требование, то он не может повлиять и на выигрыши остальных игроков. Пусть **c** — вектор требований, и пусть $(c_i', \mathbf{c}_{-i})$ — вектор, в котором требование участника i равно c_i', а требования остальных участников такие же, как в **c**. Аксиома неподвластности формулируется следующим образом.

Аксиома NB. *Для всех* $1 \le i \le n$ *и всякого* c_i', *для которого* $R_i(\mathbf{c};E) = R_i((c_i', \mathbf{c}_{-i});E)$, *при всех* j *выполнено условие* $R_j(\mathbf{c};E) = R_j((c_i', \mathbf{c}_{-i});E)$.

Приведем еще пару более специальных аксиом. Согласно аксиоме *инвариантности относительно пропорционального возрастания требований* (proportional increase in claims invariance, PICI), согласованное увеличение требований всех участников в одно и то же число раз не изменяет их выигрышей.

Аксиома PICI. $R(\alpha\mathbf{c};E) = R(\mathbf{c};E)$ *для произвольных допустимых* $\mathbf{c}$ *и* E *и всякого* $\alpha > 0$.

Соответствующая PICI аксиома *инвариантности относительно равномерного возрастания требований* (uniform increase in claims invariance, UICI) утверждает, что увеличение требований всех участников на одну и ту же величину не изменяет их выигрышей.

Аксиома UICI. $R(\mathbf{c} + \boldsymbol{\alpha}; E) = R(\mathbf{c};E)$ *для произвольных допустимых* $\mathbf{c}$ *и* E *и всякого положительного* n*-вектора* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha,\ldots,\alpha)$.

2.3. Примеры правил банкротства

Правил банкротства придумано очень много, и немало статей посвящено их аксиоматической характеризации. Мы приведем основные примеры, большая часть которых будет использоваться в дальнейшем.

2.3.1. Пропорциональное правило

Наиболее естественным и часто используемым правилом банкротства является пропорциональное правило P.

Определение 3. *Пропорциональное правило* $P = (P_1,\ldots,P_n)$ распределяет имущество E пропорционально требованиям участников: $P_i(\mathbf{c};E) = \lambda_P c_i$, $i = 1,\ldots,n$, где $\lambda_P = E / C$.

Очевидно, что правило P удовлетворяет аксиомам ETE, CMON, EMON, OPA и NB. Кроме того, оно самодвойственно. Имеет место очевидное предложение.

Предложение 1. *Правило банкротства* R *удовлетворяет аксиоме PICI, если и только если* $R(\mathbf{c};E) = P(\mathbf{c};E)$ *для произвольных требований* $\mathbf{c}$ *и имущества* E.

2.3.2. Правило ограниченно равных вознаграждений

Согласно правилу ограниченно равных вознаграждений (constrained equal awards, *CEA*), имущество E делится между участниками поровну, насколько это возможно при условии, что никто не получает больше, чем запросил.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Определение 4. $CEA_i(\mathbf{c};E)=\min\{c_i,\lambda_{CEA}\}$, где $\lambda_{CEA}\in R_+$ таково, что $\sum_i \min\{c_i,\lambda_{CEA}\}=E$.

Очевидно, что если для всех $i=1,\ldots,n$ выполнено условие $c_i\geq E/n$, то $CEA_i(\mathbf{c};E)=E/n$. Например: $CEA(60,70;100)=(50,50)$, но $CEA(40,70;100)=(40,60)$.

В общем случае можно считать, что при реализации правила *CEA* организатор выплат распределяет E маленькими порциями поровну между активными участниками, причем участник перестает быть активным по получении требуемого c_i.

2.3.3. Правило ограниченно равных убытков

Правило ограниченно равных убытков (constrained equal losses, *CEL*) распределяет убыток (разницу между совокупными требованиями и имуществом) поровну между участниками, насколько это возможно при условии, что ни у кого нельзя изымать собственных средств ($CEL_i(\mathbf{c};E)\geq 0$, $i=1,\ldots,n$).

Определение 5. $CEL_i(\mathbf{c};E)=(c_i-\lambda_{CEL})_+$, где, как обычно, $a_+=\max\{a,0\}$ при $a\in\mathbb{R}$, а $\lambda_{CEL}\in\mathbb{R}_+$ таково, что $\sum_i (c_i-\lambda_{CEL})_+=E$.

Например, *CEL* (60, 70; 100) = (45, 55), *CEL* (30, 90, 100; 100) = (0, 45, 55), в то время как *P*(60, 70; 100) = (46 3/20, 53 17/20), *CEA*(60, 70; 100) = (50, 50), *P*(30, 90, 100; 100) = (13 16/25, 40 9/10, 45 23/50), CEA(30, 90, 100; 100) = (30, 35, 35).

Можно представить правило *CEL* следующим образом. Вначале все участники получают все, что требовали, и считаются активными. Если $C>E$, то у всех активных участников отбирают по одинаковой небольшой порции имущества; при этом участники, оставшиеся ни с чем, перестают быть активными; затем процесс повторяется, пока совокупное имущество участников не составит E.

Нетрудно убедиться, что правила *CEL* и *CEA* двойственны друг другу: $CEL(\mathbf{c};E)=\mathbf{c}-CEA(\mathbf{c};C-E)$.

Имеет место следующее (почти очевидное) предложение.

Предложение 2. *Правило банкротства R удовлетворяет аксиоме UICI, если и только если* $R(\mathbf{c};E)=CEL(\mathbf{c};E)$ *для произвольных имущества E и вектора требований* $\mathbf{c}$.

2.3.4. Задача из Мишны о разделе одежды

Если двое нашли одежду, причем первый претендует на все найденное, а второй на половину, то первому следует отдать $3/4$, а второму $1/4$. Почему Мишна рекомендует такой, на первый взгляд странный, способ дележа? Дело в том, что второй участник не претендует на половину одежды и сразу уступает ее первому, после чего оставшуюся часть делят поровну. Другими словами, если стоимость одежды 1, то совокупные требования составляют 1,5, а суммарный убыток равен 0,5; этот убыток и делится поровну между участниками. В общем случае (при $n=2$), согласно этому правилу T, участник i готов уступить участнику $(-i)$ имущество стоимостью $(E-c_i)_+$. Имущество, оставшееся после этих уступок, а именно $E-(E-c_1)_+-(E-c_2)_+$, поровну делится между участниками. Таким образом, $T_i(\mathbf{c};E)=(1/2)\big(E-(E-c_1)_+-(E-c_2)_+\big)+(E-c_{-i})_+$.

Сформулированное в (Aumann, Maschler, 1985) *талмудическое правило T* распространяет правило дележа одежды на случай произвольного числа участников. Это правило использует гибридный метод. Если $C>2E$, то E распределя-

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

ется по правилу *CEA* для требований $c_i / 2$, $i = 1, \ldots, n$. Если же $C \le 2E$, то участникам выдается по половине требуемого, а оставшееся имущество распределяется по правилу *CEL* для требований $c_i / 2$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 6.

$$T_i(\mathbf{c}, E) = \begin{cases} CEA_i(c_1/2, \ldots, c_n/2; E) = \min\{c_i/2, \lambda_T\}, & \text{если } E \le C/2; \\ c_i/2 + CEL_i(c_1/2, \ldots, c_n/2; E - C/2) = & \\ = c_i - \min\{c_1/2, \lambda_T\} = \max\{c_i/2, c_i - \lambda_T\}, & \text{если } E > C/2, \end{cases}$$

где $\lambda_T \in R_+$ таково, что $\sum_i T_i(\mathbf{c}, E) = E$ (при $n = 2$ имеем $\lambda_T = (c_1 + c_2 - E)/2$).

Из двойственности правил *CEA* и *CEL* следует, что, как и пропорциональное правило *P*, талмудическое правило *T* самодвойственно.

Примеры 1. В приведенном примере из Мишны с двумя участниками имеем:

$$T(1,\ 1/2;\ 1) = (1/2,\ 1/4) + CEL(1/2,\ 1/4;\ 1/4) =$$
$$= (1/2,\ 1/4) + (1/4,\ 0) = (3/4,\ 1/4).$$

А вот несколько примеров в случае трех участников:

$T(100, 200, 300; 200) = (50, 75, 75)$ (здесь $C > 2E$ и используется правило *CEA*),

$T(100, 200, 300; 400) = (50, 125, 225)$ (здесь $C < 2E$ и используется правило *CEL*),

$T(100, 200, 300; 300) = (50, 100, 150)$ (здесь $C = 2E$ и оба правила *CEA* и *CEL* приводят к одному и тому же результату).

На первый взгляд, определение 6 кажется довольно искусственным. Однако Ауманну и Машлеру удалось убедительно его мотивировать.

Определение 7. Правило банкротства *R* называется *наследуемым* (или когерентным), если, для произвольных n, E, $\mathbf{c}$ и $1 \le i, j \le n$,

$$\left(R_i(\mathbf{c}; E), R_j(\mathbf{c}; E)\right) = R\left(c_i, c_j; R_i(\mathbf{c}, E) + R_j(\mathbf{c}, E)\right)$$

(в этом случае аналогичным свойством обладают и подмножества из более чем двух участников).

В (Aumann, Maschler, 1985, § 3, Theorem A) доказано, что талмудическое правило *T* является единственным правилом, когерентным с правилом раздела одежды для двух участников.

Из конструктивных описаний правил *CEA* и *CEL* следует, что реализовать талмудическое правило можно следующим образом. Пусть E возрастает от 0 до $C/2$. Первые порции, до тех пор пока каждый не получит $\min_i\{c_i/2\}$, распределяются между участниками поровну. Затем участники с минимальными требованиями временно выбывают из игры, а остальные получают равные порции до тех пор, пока каждый из них не получит половину следующего по величине c_i, после чего участники с таким c_i также временно выбывают из игры и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока либо будет роздано все имущество, либо каждый участник получит $c_i/2$. Если после этого еще останется какая-то часть имущества, то, понижая E от C до $C/2$, аналогичным образом частично компенсируем убытки.

Специфическими чертами талмудического правила являются следующие:

i) выигрыши и убытки рассматриваются аналогичным образом, при вычислении результата между ними фактически не делается различий;

ii) точкой качественного перехода является $E = C/2$.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Свойство i) означает самодвойственность, а ii) базируется на известном наблюдении психологов, что больше половины — это почти то же самое, что целое. Например, если вкладчик получил больше половины причитающегося ему, то он фокусирует внимание на убытках, а если меньше, то мысленно списывает весь долг ввиду незначительности полученной суммы и радуется любому вознаграждению. При этом было бы несправедливо, если бы одни кредиторы получили бóльшую часть причитающегося им, а другие меньшую. Поэтому при $E \geq C/2$ убытки, а при $E \leq C/2$ выигрыши распределяются между участниками, по возможности, поровну (см. (Aumann, Maschler, 1985, § 4)).

2.4. Сравнительный анализ основных правил банкротства

Перед тем как перейти к описанию сравнительных характеристик основных правил банкротства, опыта их использования на практике и соответствия требованиям справедливости, сделаем общее замечание.

Замечание 1. Любому правилу банкротства R можно сопоставить некоторое правило налогообложения $\mathcal{T} = \mathcal{T}_R$. А именно пусть домохозяйство i обладает имуществом стоимостью c_i, $i = 1,\dots,n$, $\mathbf{c} = (c_1,\dots,c_n)$, $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, а для нормального функционирования государства (или, скажем, муниципального округа) необходимо собрать сумму $L < C$, обложив для этого домохозяйство i налогом $0 \leq \mathcal{T}_{R_i}(\mathbf{c};L) = R_i^*(\mathbf{c};L) \leq c_i$, где $R^*(\mathbf{c};L) = \mathbf{c} - R(\mathbf{c};C-L)$ — правило, двойственное к $R(\mathbf{c};L)$ (см. определение 2). Тогда $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}_R(\mathbf{c};L) = (T_{R\,1}(\mathbf{c};L),\dots,T_{R\,n}(\mathbf{c};L))$ — правило налогообложения. При этом правило банкротства R получается из правила налогообложения $\mathcal{T} = \mathcal{T}_R$ аналогичным образом: $R = R(\mathbf{c},E) = \mathcal{T}^*(\mathbf{c};C) = \mathbf{c} - \mathcal{T}(\mathbf{c},C-L)$.

Перейдем к исследованию конкретных правил банкротства.

2.4.1. Пропорциональное правило

По частоте использования в реальной жизни с большим отрывом лидирует пропорциональное правило P. Идея, что кредитор с бóльшим вкладом должен, при прочих равных, получить больше (или хотя бы не меньше) в результате процедуры банкротства, как правило, не вызывает возражений. Но почему именно пропорционально больше? Важным свойством пропорционального правила является725 неманипулируемость: у кредиторов нет стимула разбить свое требование на несколько или объединить группу требований в одно. То есть отношение к кредитору не зависит от величины долга перед ним. Иными словами, пропорциональное правило нейтрально по отношению к величине требований. Именно поэтому в сфере финансов правило P носит латинское название *pari passu* (на равных основаниях).

Пропорциональное правило повсеместно применяется в сфере кредитно-финансовых отношений. Соответствующее ему правило налогообложения (плоская шкала налогообложения, flat tax) применялось еще в древности (десятина в Римской империи) и продолжает использоваться и в настоящее время в таких странах, как Монголия и Казахстан (и, до недавнего времени, в Российской Федерации), а также в одиннадцати штатах США.

Что касается справедливости правила P, то еще Аристотель в Никомаховой этике писал, что *справедливо* (или правосудно) *то, что пропорци-*

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

онально, а несправедливо то, что нарушает пропорцию. Но это общее философское высказывание. О недавних экспериментах, подтверждающих мнение Аристотеля применительно к проблеме банкротства, будет рассказано в пп. 2.4.4. Однако это относится именно к проблеме банкротства; плоская шкала налогообложения невыгодна беднейшим слоям населения, не способствует уменьшению неравенства и в настоящее время не используется в наиболее развитых странах мира (впрочем, используются ее варианты, в которых плоская шкала применяется лишь к части доходов, например в Эстонии).

2.4.2. Правило CEA

Это правило является одной из двух главных адаптаций идеи равенства к проблеме банкротства. Согласно *CEA*, имущество между кредиторами распределяется по возможности поровну, с тем условием, что никто не получает больше, чем требует. Это правило до какой-то степени защищает мелких вкладчиков, усиливая их позиции, крупным же вкладчикам это правило невыгодно.

Правило *CEA* применяется в талмудическом праве к распределению денег между кредиторами, долги банкрота перед которыми относятся к одной и той же дате. Объясняя содержащиеся в талмуде примеры, Маймонид подробнейшим образом описывает упомянутую в пп. 2.3.2 процедуру реализации этого правила (см. также (Aumann, Maschler, 1985, § 4)). Заметим, что (по возможности) равный раздел имущества и сейчас применяется в законодательстве различных стран в случае, если требования участников сложно обосновать, например при разводе супругов или при возмещении ущерба, возникшего в результате халатности нескольких ответственных лиц.

Правило налогообложения, соответствующее *CEA* согласно замечанию 1, называется *выравнивающим налогом* (leveling tax). Цель этого налога (помимо фискальной) — экспроприация имущества у богатых (при этом в дальнейшем возможно использование части собранных налогов для материальной помощи бедным). Такая система налогообложения выгодна беднейшим слоям населения, но трудно привести пример ее успешного (и ненасильственного) применения. Помимо того, что выравнивающее налогообложение требует силовой поддержки и демотивирует наиболее активные слои населения, для него необходима точная информация о размерах имущества граждан, а для получения такой информации зачастую приходится опираться на доносы. Большинство населения может считать выравнивающий налог справедливым только в неблагополучных обществах с высоким уровнем неравенства и сомнительным происхождением накопленного богатства. В развитых странах применяются более мягкие разновидности прогрессивного налога, относительно которых гораздо легче достичь общественного согласия.

2.4.3. Правило CEL

Другой адаптацией идеи равенства к проблеме банкротства является правило *CEL*, которое, по возможности, выравнивает не выигрыши, а убытки. Ясно, что это правило выгодно крупным вкладчикам и невыгодно мелким, которые могут потерять весь свой вклад или бóльшую его часть. Правило *CEL* использовалось еще в талмудическом регулировании аукционов. Маймонид приводит

Журнал НЭА,
№ 1 (70), 2026,
с. 12–46

следующий пример. Продается некоторый предмет, причем первый участник торгов предлагает за него 10 шекелей, второй 20, а третий 24, но затем второй и третий отзывают свои ставки (и должны компенсировать казне возникшие из-за этого убытки). В результате аукционер продает этот предмет первому участнику за 10 шекелей, но вычитает со второго и третьего по 7, так что казна все равно получает 24 шекеля. Если же откажутся все трое, а потом предмет аукциона удастся продать за 3 шекеля, то аукционер вычитает по 7 шекелей с каждого из троих.

Правило налогообложения, соответствующее *CEL*, называется подушным налогом или податью (head (или poll) tax). Примеры такого налогообложения встречаются еще в еврейском и мусульманском праве. На протяжении нескольких веков подушный налог tributum capitis (или просто capitatio) взимался в провинциях Римской империи. Особой приверженностью к введению подушных налогов прославилась Великобритания. В России подушный налог был введен Петром Первым незадолго до его смерти. В XVIII в. подушная подать приносила половину государственных доходов Российской империи, но затем, с введением косвенных налогов, ее роль уменьшилась, а во второй половине XIX в. размер подати стал зависеть от губернии, и постепенно она взиматься перестала. Подушный налог дискриминирует малоимущих и по сути является регрессивным. Неудивительно, что попытки введения таких налогов неоднократно наталкивались на народное сопротивление. Так, троекратное взимание подушного налога в период с 1377 г. по 1381 г. считается одной из причин восстания Уота Тайлера в Англии, а массовое недовольство попыткой ввести подушный налог (community charge) в Шотландии, Англии и Уэльсе привело (наряду с другими факторами) к отставке Маргарет Тэтчер в 1990 г. Следует отметить, что в большинстве случаев реальный подушный налог не полностью соответствует правилу *CEL*: обычно речь не идет о том, чтобы изымать все имущество у малоимущих; иногда размер налога зависит от географической области и/или от общественного положения налогоплательщика.

Замечание 2. Автор не нашел в литературе описания общего правила, по которому произвольному правилу банкротства сопоставляется правило налогообложения, как это сделано в замечании 1. Из-за отсутствия общепринятого правила соответствия, а также недостаточного использования понятия двойственности правил банкротства (см. определение 2) в литературе на этот счет нет единого мнения. И если в случае самодвойственных правил банкротства, таких как P и T, разногласий обычно не возникает, то в отношении рассмотренных выше двойственных друг другу правил *CEA* и *CEL* дело обстоит иначе. Достаточно сказать, что в замечании 7 к § 3 на стр. 255 обзорной статьи (Thomson, 2003) указано, что правилу *CEA* соответствует выравнивающий налог, а правилу *CEL* — подушный, а в замечании 7 к главе 2 книги (Thomson, 2019) утверждается диаметрально противоположное. Эту разноголосицу можно понять: формально правила налогообложения являются правилами банкротства, и по форме правильно замечание из книги (Thomson, 2019), но по содержанию и цели (правило *CEA* и выравнивающий налог нацелены на выравнивание имущества, а правило *CEL* и подушный налог — на выравнивание убытков) следует придерживаться замечания из статьи (Thomson, 2003) или нашего замечания 1.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

2.4.4. Что такое справедливость?

Мы уже обращали внимание на то, что, несмотря на формальную схожесть, по сути задача дележа доллара, классическая проблема банкротства $R(\mathbf{c};E)$ и ее вариант, в котором требования участников c_i являются не вкладами, а заявками участников и задача о распределении налогового бремени (также формально являющаяся проблемой банкротства) — это совершенно разные задачи, и интуитивное понимание справедливости для каждой из них свое. Так, в задаче DD кажется интуитивно справедливым поделить свалившиеся с неба деньги поровну, и эта догадка подтверждается экспериментами, описанными в статьях (Nydegger, Owen, 1975; Roth, Malouf, 1979). В классической задаче о банкротстве интуитивно можно ожидать, что большинство вкладчиков справедливым сочтут пропорциональное правило P, хотя, возможно, участники с малыми вкладами предпочтут сдвинуться в сторону правила *CEA*, а крупные вкладчики — в сторону правила *CEL*. В случае налогообложения интуиция подсказывает, что бóльшая часть населения (за исключением самых крупных собственников) предпочтет прогрессивный налог, умеренно сдвигаясь от плоской шкалы к выравнивающему налогу. Однако это спекулятивные рассуждения, и до недавних пор экспериментальной проверке подверглась только задача DD (как и ожидалось, эта проверка подтвердила справедливость эгалитарного распределения). Что касается остальных задач, перечисленных в этом абзаце, я нашел только одну работу, посвященную справедливости в классической проблеме о банкротстве (разумеется, понятие справедливости субъективно и зависит от референтной группы, а во всех известных мне статьях экспертами выступали студенты).

В работе (Cappelen et al., 2019) авторы описывают эксперимент с участием 109 студентов Норвежской школы экономики. Эксперимент, моделирующий проблему банкротства, повторялся в течение четырех сессий и насчитывал три фазы. В фазе производства каждый из участников выбирал одну из пяти фирм, работая в которой он мог заработать деньги, причем возможности заработать в каждой из фирм одинаковые (в одной фирме следовало пересчитать черные квадратики, в другой — сложить числа, в третьей — найти в таблице заданное число, в четвертой — переписать заданный текст, а в пятой — найти слово, полученное из заданного перестановкой букв; заработная плата определялась успешностью выполнения задания). Все это повторялось 31 раз, и в зависимости от заработанной суммы формировались требования участника к каждой из фирм в диапазоне от 0 до 465 NOK (норвежских крон). В фазе банкротства компьютер случайным образом выбирал три из пяти фирм, которые объявлялись банкротами, а также ликвидационную стоимость каждой из этих фирм (35%, 50% или 65% требований к данной фирме). Затем компьютер случайным образом разбивал участников на пары из участников, работавших в одной и той же фирме с одной и той же ликвидационной стоимостью, в результате чего были созданы 299 ситуаций банкротства фирм, требования в каждой из которых предъявляли по два участника. Если фирма не обанкротилась, то работавшие в ней участники полностью получали заработанные деньги. В противном случае из числа студентов случайным образом назначался арбитр (третейский судья), не имевший отношения к фирме и не знающий, кто на ней работал. Арбитру были известны индивидуальные накопления этой пары участников и процент, на который сни-

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

зилась их стоимость в результате банкротства фирмы (т.е. 65%, 50% или 35%), и другой информации у него не было. Задачей арбитра в каждом случае являлся раздел между двумя претендентами их совокупных накоплений, оставшихся после банкротства фирмы; при этом руководствоваться арбитр должен исключительно своим чувством справедливости. Затем каждый из участников получал конверт с причитающимися ему деньгами (с учетом 100 NOK, выдававшихся студентам в начале эксперимента, средняя выплата участникам составила 431 NOK). По окончании эксперимента его организаторы с помощью простейшей математической модели сравнили распределения выигрышей, предложенные арбитрами, с распределениями, диктуемыми основными правилами банкротства. В результате выяснилось, что примерно 85% арбитров выбрали распределение, близкое к пропорциональному, а 12% — распределение, близкое к *CEL*. Число арбитров, делавших выбор, близкий к диктуемому другими правилами (тестировались еще *CEA* и талмудическое правило *T*) было пренебрежимо мало.

Итак, согласно описанному эксперименту, правило pari passu представляется наиболее справедливым подавляющему большинству экспертов, а участники, мотивированные идеалом равенства, скорее озабочены тем, чтобы уравнять потери, а не выигрыши (т.е. реально они скорее защищают тех, кто больше заработал). Разумеется, можно подвергать критике правила эксперимента, например разбиение игроков на пары. Можно также ставить под сомнение тот факт, что отношение арбитра к деньгам, полученным за конкретную работу, такое же, как к вкладам в банке. Однако, насколько известно автору, (Cappelen et al., 2019) — единственная эмпирическая работа, где реалистично моделируется банкротство, а решение о разделе имущества принимается независимыми экспертами исходя из соображений справедливости. Впрочем, как уже было отмечено, между оценкой справедливости пропорционального правила банкротства и соответствующей ему плоской шкалы налогообложения есть большая разница. В первом случае, в отличие от второго, администрирующий орган не ставит перед собой фискальных задач и не задумывается о проблемах социальной справедливости или уровня неравенства в обществе, его задача — по возможности справедливо распределить оставшиеся после банкротства деньги. Что же касается пропорционального налога, то бóльшая часть экспертов считают его несправедливым и в большинстве стран вместо него применяется одна из разновидностей прогрессивного налога.

3. Равновесие Нэша в игре с ограничениями

Как мы уже отмечали, в игре DD нэшевских равновесий (слишком) много: каждое распределение $\mathbf{c}$ с $C=1$ равновесно по Нэшу. Иначе обстоит дело в игре заявок $\Gamma=\Gamma(R)$, описанной в п. 2.1. Например, для популярного пропорционального правила P вообще не существует нэшевских равновесий: увеличивая c_i при фиксированных $\mathbf{c}_{-i}$, мы увеличиваем выигрыш игрока i. Несколько лучше обстоит дело с правилом *CEA*: здесь каждый профиль $\mathbf{c}$, для которого $c_i \geq 1/n$, $i=1,\ldots,n$ равновесен по Нэшу. Для других правил банкротства равновесия Нэша устроены по-другому, но вообще понятие нэшевского равновесия не очень подходит для этого круга задач.

Журнал НЭА,
№ 1 (70), 2026,
с. 12–46

Однако, согласно определению 1, до сих пор мы предполагали, что участники могут предъявлять сколь угодно большие требования. Можно рассмотреть и более общую ситуацию, когда $0 < c_i \le M_i$, где $0 < M_i \le \infty$, $i = 1,\dots,n$. Соответствующую игру естественно обозначить $\Gamma_{\mathbf{m}}(R)$, где $\mathbf{m} = (M_1,\dots,M_n)$, так что $\Gamma(R) = \Gamma_\infty(R)$, где $\infty = (\infty,\dots,\infty)$. При $M_i < \infty$ и довольно слабых ограничениях участнику i выгодно выдвигать максимально возможное требование M_i, $i = 1,\dots,n$. Чаще всего встречается ситуация, когда ограничения одинаковы для всех игроков, т.е. $M_1 = \dots = M_n = M$ (например, если игрокам известна величина распределяемого имущества E (в задаче о банкротстве это так), то естественно положить $M = E$). Тогда можно ожидать, что в соответствующей игре $\Gamma_{\mathbf{m}}(R)$, $\mathbf{m} = (M,\dots,M)$ равномерное распределение $\mathbf{e} = (E/n,\dots,E/n)$ является единственным распределением, оптимальным по Нэшу. Исследованию этого подхода к решению проблемы описания множества равновесий в задаче о дележе доллара посвящена статья (Ashlagi et al., 2012), краткому изложению результатов которой посвящен настоящий раздел.

Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся искусственность такого подхода (см. замечание 3. I), он довольно широко применяется на практике в тех случаях, когда трудно проверить, насколько обоснованы требования участников. Например, во многих странах, включая РФ, при разводе совместно нажитое имущество делится между супругами поровну, независимо от вклада в его накопление, который каждый из супругов обычно склонен завышать.

Предложение 3. *Пусть R эффективно (т.е. при $C \ge E$ распределяется все имущество E: $\sum_i R_i(\mathbf{c}) = E$) и удовлетворяет аксиомам ETE и OPA.*

I. Вектор требований $\mathbf{m} = (M,\dots,M)$ является нэшевским равновесием в игре $\Gamma_{\mathbf{m}}(R)$.

II. Для произвольного нэшевского равновесия в игре $\Gamma_{\mathbf{m}}(R)$ вектор выигрышей имеет вид $\min\{1, nM/E\}\mathbf{e}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

I. Ввиду эффективности и аксиомы ETE, $R(\mathbf{m};E) = \min\{1,\ nM/E\}\mathbf{e}$, так что достаточно доказать I в случае $M > E/n$. Но из аксиомы OPA следует, что если $c_i' < M$, то $R_j(c_i',\mathbf{m}_{-i};E) \ge R_i(c_i',\mathbf{m}_{-i};E)$ для $j \ne i$, так что если $R_i(c_i',\mathbf{m}_{-i};E) > E/n$, то $\sum_k R_k(c_i,\mathbf{m}_{-i};E) > E$ – а это противоречие. Следовательно, $\mathbf{m}$ – равновесие Нэша.

II. Предположим, что существует нэшевское равновесие $\mathbf{c}$ такое, что $R(\mathbf{c};E) \ne \min\{1, nM/E\}\mathbf{e}$, а значит, тогда для некоторого i, $1 \le i \le n$ имеем $R_i(c) < \min\{M,\ E/n\}$. Положим $c_i' = M$. Поскольку $\mathbf{c}$ – нэшевское равновесие, $R_i(c_i',\mathbf{c}_{-i};E) \le R_i(\mathbf{c};E) < \min\{M, E/n\} \le E/n$. Из эффективности следует, что $C' \ge C \ge E$, $\sum_k R_k(c_i',\mathbf{c}_{-i};E) = E$. Ввиду аксиомы OPA, для всех $j \ne i$ таких, что $c_j < M = c_i'$, имеем $R_j(c_i',\mathbf{c}_{-i};E) \le R_i(c_i',\mathbf{c}_{-i};E) < E/n$. Ввиду аксиомы ETE, это же неравенство справедливо и для тех j, для которых $c_j = M = c_i'$, так как $R_j(c_i',\mathbf{c}_{-i};E) = R_i(c_i',\mathbf{c}_{-i};E) < E/n$. Следовательно, $\sum_k R_k(c_i',\mathbf{c}_{-i}) < E$ – противоречие. ■

Замечание 3.

I. Если потолки требований у агентов разные (т.е. $\exists\ i,j \mid M_i \ne M_j$), то даже при выполнении всех условий предложения 3 могут существовать равновесия по Нэшу с неравными требованиями. Например, вектор $\mathbf{m} = (M_1,\dots,M_n)$ является равновесием для пропорционального правила P.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

II. Примеры показывают, что нельзя отказаться ни от одного из условий предложения 3.

III. Если в условиях предложения 3 заменить условие OPA на CMON, то утверждение 3.I останется верным для любого числа участников, а утверждение 3.II справедливо только для $n \le 3$; для произвольного n нужно добавить условие NB.

IV. Правила банкротства P, CEL и CEA удовлетворяют всем условиям предложения 3, но для первых двух **m** — единственное равновесие по Нэшу, а для последнего, в случае $M > E / n$, таких равновесий бесконечно много.

4. Равновесия Нэша в семействах игр со штрафами

В классической задаче DD при $C > 1$ участники не получают ничего. Другими словами, в случае если совокупные требования превышают \$1, участник i терпит убыток (или выплачивает штраф) c_i, $i = 1,\ldots,n$. Это наказание представляется слишком жестоким. Еще один недостаток задачи DD состоит в том, что в ней много нэшевских равновесий: таковыми являются все профили с $C = 1$. В то же время интуитивно ясно (и подтверждено экспериментально), что реальный выбор участников обычно близок к эгалитарному. В предыдущем разделе мы видели, что в задаче о банкротстве эгалитарное распределение является нэшевским (а часто и единственным, см. замечание 3.IV) равновесием при условии, что требования участников c_i ограничены распределяемым имуществом E. Естественно желание рассмотреть промежуточные варианты, когда избыточность (совокупных) требований игроков наказывается, но не полным лишением выигрышей.

В статье (Karagözoğlu, Keskin, Sağlam, 2023) игра DD вкладывается в семейство игр $\mathrm{DD}_\alpha(n,R)$, где $R = R(\mathbf{c},E)$ — правило банкротства, а $\alpha \in \mathbb{R}_+$ — параметр, управляющий строгостью наказания: при $C \le 1$ каждый получает запрашиваемое, а при $C > 1$ — между участниками распределяется имущество $E = E(\alpha) = (1-\alpha(C-1))_+ = \max\{1-\alpha(C-1),0\}$ (мы сохранили для этого имущества обозначение E, поскольку именно оно реально распределяется между участниками). Другими словами, штрафом (или налогом) с коэффициентом α облагаются избыточные требования участников, а именно $C-1$, и с возрастанием α стоимость имущества $E = E(\alpha)$, распределяемого между участниками, уменьшается. Если $\alpha = 0$, то доллар полностью распределяется между игроками, так что мы получаем обычную задачу о банкротстве, а при $\alpha = \infty$ (или, для заданного $C > 1$, при $\alpha \ge 1/(C-1)$) игра DD_α сводится к игре DD. Кроме того, предполагается, что $0 \le c_i \le 1$, т.е., зная, что распределяется \$1, ни один игрок не требует большей суммы и мы находимся в условиях разд. 3 (это предположение не является безобидным и влияет на структуру множества нэшевских равновесий, см. (см. замечание 3.I).

Равновесие по Нэшу называется *эффективным*, если для него $E = 1$, т.е. отсутствуют штрафы и \$1 целиком распределяется между игроками. Оказывается, что структура множества эффективных равновесий зависит от соотношения между α и числом игроков n.

Предложение 4. *Пусть P – пропорциональное правило,* $\alpha > 0$.

I. Если число игроков n достаточно велико, а именно $n > \alpha + 1$, то в игре $\mathrm{DD}_\alpha(n,P)$ не существует эффективных равновесий по Нэшу.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

II. Если $n \le \alpha + 1$, *то все нэшевские равновесия в задаче* $\mathrm{DD}_{\alpha}(n, P)$ *описываются условиями* $C = 1$, $c_i \ge 1/(\alpha+1)$, $i = 1,\ldots,n$. *В частности, при* $n = \alpha + 1$ *существует единственное нэшевское равновесие* $\mathbf{e} = (1/n,\ldots,1/n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оба утверждения проверяются простым вычислением, которое мы опустим (см. (Karagözoğlu et al., 2023, Prop. 4.3–4.4)). Дадим интуитивное объяснение этих результатов. Пусть $C = 1$. Поскольку правило P строго монотонно по требованиям всех игроков, каждому из них выгодно повысить свое требование. Штраф, возникающий при таком повышении, делится между всеми участниками, так что если игроков много, то выгода превосходит потери. Другими словами, при $C = 1$ каждому из участников выгодно быть безбилетником. ■

Предложение 4 проясняет роль штрафных санкций: достаточно суровые штрафы $(\alpha \ge n-1)$ позволяют избежать неэффективных равновесий. Более того, полагая $\alpha = n - 1$, организатор игры может имплементировать эгалитарное распределение, которое в этом случае является единственным равновесием по Нэшу.

Замечание 4.

I. Из предложения 3 следует, что в игре $\mathrm{DD}_{\alpha}(n, P)$ существует единственное эффективное равновесие Нэша, в котором каждый участник требует \$1, а получает $\$1/n$.

II. При $\alpha = \infty$ для произвольного правила банкротства R всякий эффективный раздел \$1 является равновесием Нэша для игры $\mathrm{DD} = \mathrm{DD}_{\infty}$. Из предложения 4 следует, что по мере возрастания α от 0 до ∞ множество нэшевских равновесий в игре $\mathrm{DD}_{\alpha}(n, P)$ расширяется от эгалитарного до множества нэшевских равновесий в игре DD (т.е. множества разбиения единицы на n частей).

Величину штрафа $\alpha(C-1)$ естественно рассматривать как *меру неэффективности.*

Предложение 5. *При* $\alpha \in (0, \infty)$, $n \le \alpha + 1$ *все равновесия по Нэшу в игре* $\mathrm{DD}_{\alpha}(n, P)$ *эффективны, а при* $n > \alpha + 1$ *неэффективность нэшевских равновесий увеличивается с возрастанием n (а следовательно, размер распределяемого имущества уменьшается); при* $n \to \infty$ *распределять уже нечего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в случае предложения 4, мы опустим доказательство, основанное на простых вычислениях. Интуитивно ясно, что, при заданном α, с ростом числа игроков стать безбилетником становится выгоднее, поскольку штраф, обусловленный возрастанием требований одного из игроков, распределяется на всех участников, а приходящаяся на него нагрузка уменьшается, что и приводит к падению эффективности. ■

Подводя итоги, мы видим, что применение (наиболее распространенного) пропорционального правила P в игре $\mathrm{DD}_{\alpha}(n)$ может приводить к неэффективности, предотвратить которую возможно, назначив достаточно высокий уровень штрафа $(\alpha \ge n-1)$. При минимальном штрафе, обеспечивающем эффективность $(\alpha = n-1)$, существует единственное равновесие по Нэшу, а именно $\mathbf{e} = (1/n,\ldots,1/n)$ (и оно, разумеется, эффективно).

Впрочем, существуют и такие правила банкротства R, для которых в игре $\mathrm{DD}_{\alpha}(n, P)$ *при любых* α эгалитарный вектор требований $\mathbf{e}$ является единственным эффективным нэшевским равновесием. Важным примером является правило *CEA*.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Предложение 6. *При* $\alpha \in (0,\infty)$ *в игре* $\mathrm{DD}_\alpha(n, CEA)$ *существует единственное эффективное нэшевское равновесие, а именно* $\mathbf{e} = (1/n, \ldots, 1/n)$.

Доказательство. Мы не будем давать строгое доказательство, но интуитивно ясно, какие особенности правила *CEA* приводят к такому результату. Дело в том что, согласно правилу *CEA*, при $c_i \geq 1/n$, $i = 1, \ldots, n$ у игроков нет стимула увеличивать свои требования, а штрафные санкции побуждают игроков с $c_i > 1/n$ снизить свои запросы. Таким образом, правило *CEA* предупреждает появление безбилетников и препятствует возникновению связанной с ними неэффективности. Однако ввиду монотонности выигрышей и неизбирательности штрафов при $c_i < 1/n$ повышать требования выгодно. ■

5. Homo socialis versus homo oeconomicus

До сих пор мы обсуждали попытки приспособить понятие равновесия по Нэшу к исследованию различных обобщений игры DD, использующих правила банкротства. Однако если функции полезности участников эгоистические, нэшевское равновесие не учитывает интересов партнеров и плохо подходит для объяснения выбора согласованных стратегий. В то же время, как мы уже отмечали, эксперименты показывают, что в DD и родственных играх участники склонны выбирать профили, близкие к эгалитарному. Для преодоления этого противоречия в рамках нэшевской парадигмы приходится предположить, что полезность игроков каким-то образом зависит не только от их выигрыша, но и от выигрыша партнеров. В некоторой степени эта идея уже была реализована в предыдущем разделе: увеличение требования игрока наказывалось штрафом, величина которого зависит от соотношения между α и *n*, и, выбирая стратегию, игрок сравнивал свой выигрыш с величиной этого штрафа. Однако в модели со штрафами едва ли можно говорить о реальной озабоченности игроков благосостоянием партнеров. В этом разделе, не выходя за рамки нэшевского подхода, мы обсудим две модели, учитывающие влияние коллективистской сущности человека (*homo socialis*) на его экономическое поведение (*homo oeconomicus*). Как и всюду в этой статье, мы сосредоточимся на вариантах модельной задачи DD[3].

5.1. Альтруистические предпочтения

Пожалуй, самое раннее указание на необходимость модифицировать функцию полезности, поставив себя на место партнера, принадлежит Эджуорту. В книге (Edgeworth, 1881, p. 53), рассматривая экономику с двумя агентами X и Y с полезностями P и Π соответственно, он написал: «Можно предположить, что, по здравом размышлении, X будет максимизировать не P, а $P + \lambda$, где λ *коэффициент реальной симпатии*»[4]. Идеи Эджуорта получили развитие в работах Беккера (Becker, 1991, chap. 8). В нашей ситуации и обозначениях в случае двух игроков полезность игрока i ($i = 1,\ 2$) имеет вид $u_i(c_i, c_{-i}) = \pi(c_i, c_{-i}) + \alpha_i \pi(c_{-i}, c_i)$, где $0 \leq \alpha_i \leq 1$ – *степень альтруизма* игрока i, т.е. вес, который он придает выигрышу партнера.

Можно было бы надеяться, что (альтруистический) учет интересов партнера сузит множество равновесий и приблизит его к эгалитарному. Однако следующее предложение, доказательство которого не отличается от доказательства в случае эгоистичных игроков, показывает, что это не так: всякое распределение

[3] Говоря о задаче DD в этом и следующем разделах, мы имеем в виду именно *раздел доллара*, не делая предположения, что функции полезности игроков совпадают с их выигрышами.

[4] Цитируется по: (Newman, 2003).

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

на границе Парето является равновесием, так что множество нэшевских равновесий не зависит от степени альтруизма участников.

Предложение 7. *Множество нэшевских равновесий в игре* DD *двух лиц со степенями альтруизма* α_1, α_2 *состоит из всех пар* (c_1, c_2), *для которых* $C = c_1 + c_2 = 1$.

5.2. Отвращение к неравенству

Еще в работе (Fehr, Schmidt, 1999) была сделана попытка объяснить некоторые проявления кооперативного поведения спецификой функций полезности, которые отражают присущее игрокам *отвращение к неравенству*. Конкретно, в задаче о разделе доллара между двумя игроками предполагается, что функции полезности участников имеют вид

$$u_i(c_i, c_{-i}) = \pi(c_i, c_{-i}) - \alpha_i(\pi(c_{-i}, c_i) - \pi(c_i, c_{-i}))_+ - \beta_i(\pi(c_i, c_{-i}) - \pi(c_{-i}, c_i))_+,$$

где $\pi(c_i, c_{-i})$ выигрыш при профиле требований (c_i, c_{-i}), $0 \le \beta_i < 1$ — степень *отвращения к превосходству*, а $\alpha_i \ge \beta_i$ — степень *отвращения к отставанию* участника i ($i =$ 1, 2).

Попытка модифицировать эгоистические функции полезности, основанная на таком эгалитарном понимании справедливости, представляется довольно естественной. Однако нас интересует структура нэшевских равновесий, и оказывается, что некоторые из них настолько плохи, что оба участника ничего в них не получают. В предположении, что степени отвращения участников одинаковы, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, опишем нэшевские равновесия (c_1, c_2), для которых $c_1 + c_2 > 1$ (и стало быть $\pi(c_1, c_2) = \pi(c_2, c_1) = 0$).

Предложение 8. *Пусть* $0 \le \beta < 1$ *и* $\alpha \ge \beta$ *степени отвращения игроков к превосходству и отставанию соответственно. Тогда профиль* (c_1, c_2), *для которого* $c_1 + c_2 > 1$, *равновесный по Нэшу если и только если* $(1+\alpha)/(1+2\alpha) \le c_i \le 1$, $i = 1,\ 2$.

Доказательство. В условиях предложения $c_1 + c_2 > 1$ и $u_1 = u_2 = 0$. Лучшее, что может сделать участник i, — уменьшить ставку до c_i', где $c_i' + c_{-i} = 1$, т.е. $c_i' = 1 - c_{-i}$. Поэтому у него нет стимула отклониться от стратегии (c_1, c_2) если и только если $(1 - c_{-i}) - \alpha(c_{-i} - (1 - c_{-i}))_+ - \beta((1 - c_{-i}) - c_{-i})_+ \le 0$. Заметим, что $c_{-i} \ge 1/2$, так как в противном случае это неравенство эквивалентно $(1 - c_{-i}) - \beta(1 - 2c_{-i}) \le 0$, откуда $\beta < 1/2$ и $c_{-i} \ge (1-\beta)/(1-2\beta) > 1$ — противоречие. Но при $c_{-i} \ge 1/2$ неравенство приобретает вид $(1 - c_{-i}) - \alpha(2c_{-i} - 1) \le 0$, т.е. $c_{-i} \ge (1+\alpha)/(1+2\alpha)$, $i = 1,\ 2$. ■

На рис. 1 в качестве иллюстрации к предложению 8 изображено множество нэшевских равновесий (c_1, c_2), удовлетворяющих неравенству $c_1 + c_2 > 1$, при $\beta = 0$, $\alpha \ge 0$.

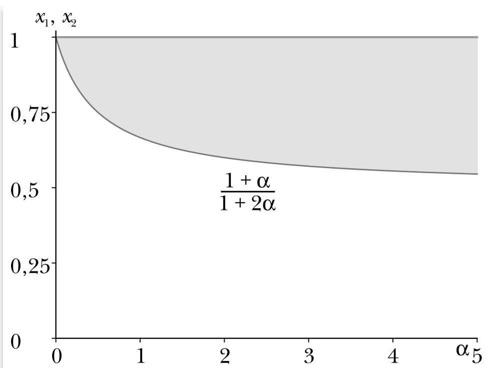

Рис. 1

Если игрок i выбирает $c_i = 1/2$, то игрок $(-i)$ максимизирует все три компоненты своей функции полезности, выбирая $c_{-i} = 1/2$. Поэтому для всех пар (α, β) профиль $(1/2,\ 1/2)$ является равновесием Нэша.

Следующее предложение описывает все нэшевские равновесия на эффек-

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

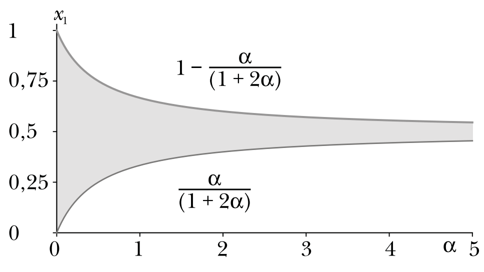

Рис. 2

тивной границе $c_1+c_2=1$ в задаче DD двух лиц с отвращением к неравенству.

Предложение 9. *Пусть* $0\le\beta_i<1$, $\alpha_i>\beta_i$, $i=1,2$ *– степени отвращения игроков к превосходству и отставанию соответственно. Тогда множество равновесий* $(c_1,c_2)\in[0,\ 1]^2$, *удовлетворяющих условию* $c_1+c_2=1$ *и отличных от эгалитарного* $(1/2,\ 1/2)$, *описывается неравенствами*

$$\begin{cases} c_i-\alpha_i(c_{-i}-c_i)_+\ge 0, \\ c_{-i}-\beta_{-i}(c_{-i}-c_i)_+\ge 0, \end{cases} i=1,\ 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $c_1=c_2$, мы получаем эгалитарное равновесие. Ввиду симметричности, достаточно рассмотреть случай $c_1<c_2$. Равновесие $(c_1,1-c_1)$ должно удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases} c_1-\alpha_1(c_2-c_1)\ge 0, \\ c_2-\beta_2(c_2-c_1)\ge 0, \end{cases}$$

поскольку их левая сторона представляет полезности игроков в нашем профиле, а правая сторона — их полезность при увеличении требований. При этом у первого игрока нет стимула уменьшать требование, поскольку это снизило бы его материальный выигрыш, а неравенство между игроками возросло бы. У второго игрока тоже нет такого стимула, поскольку уменьшение $c_2=1-c_1$ на Δc_2 ухудшает его полезность на $0<(1-\beta_2)\Delta c_2<\Delta c_2$.

На рис. 2 отображены равновесные состояния из предложения 9 при $\beta_1=\beta_2=0$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$. Отметим, что по мере возрастания α от 0 до ∞ множество равновесий сжимается от отрезка $[0,\ 1]$ до эгалитарного $(1/2,\ 1/2)$.

6. Homo moralis

Говоря о *homo socialis*, мы имели в виду, что полезность игроков тем или иным образом зависит не только от своих выигрышей, но и от выигрышей партнеров; при этом нас интересовали нэшевские равновесия. Однако при таком подходе не уменьшается отчужденность между участниками — их можно назвать социально ответственными, альтруистами, но не коллективистами. В последние десятилетия все более популярными становятся модели, в которых взаимодействие агентов не ограничивается конкуренцией, а отражает идеи коллективизма и сотрудничества (см. (Полтерович, 2015, 2016)).

Начиная, по-видимому, со статьи Ж.-Ж. Лаффона (Laffont, 1975), для обоснования коллективистского поведения экономисты используют *кантовскую максиму,* согласно которой участники задают себе вопрос, а что если каждый из партнеров будет себя вести так же, как и я. В дальнейшем исследования моделей, в которых агенты (в какой-то степени) следуют кантовской моральной максиме, разделились на два потока. С одной стороны, Дж. Ремер отказался от использования равновесия по Нэшу и на протяжении многих лет разрабатывает концепцию *кантовской оптимизации.* Подходу Ремера посвящена монография (Roemer, 2019), а его реализация в контексте рассматриваемого нами круга задач будет

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

приводится в разд. 7. С другой стороны, оставаясь в рамках нэшевской парадигмы, И. Альже и Й. Вейбулл (Alger, Weibull, 2013, 2017) модифицировали функции полезности с учетом кантовской максимы и ввели понятие «homo moralis». Другими словами, в то время как Ремер изменил саму концепцию равновесия, Альже и Вейбулл ввели кантовский компонент в функции полезности участников. Преимуществом последнего подхода является появление дополнительных параметров, интерпретируемых как *степени* (или индексы) *моральности* агентов. В этом разделе, основываясь на статье (Juan-Bartoli, Karagözoğlu, 2024a), исследуется реализация концепции homo moralis применительно к задаче DD.

Рассмотрим игру двух лиц, в которой, при выборе стратегий (c_1, c_2), участник i получает (материальный) выигрыш $\pi(c_i, c_{-i})$. Игрок i является *homo moralis* со степенью моральности $k_i \in [0,1]$, если его функция полезности имеет вид

$$u_{k_i}(c_i, c_{-i}) = (1-k_i)\pi(c_i, c_{-i}) + k_i\pi(c_i, c_i). \tag{1}$$

При $k_i = 0$ стратегия игрока i состоит в максимизации материального выигрыша, так что в этом случае он ведет себя как *homo oeconomicus*, а при $k_i = 1$ он максимизирует выигрыш в предположении, что партнер выбирает ту же стратегию, что он сам, т.е. ведет себя как *homo kantiensis*. Напомним, что кантианское поведение предполагает следование *категорическому императиву Канта*: следует предпринимать только универсализуемые действия, т.е. такие, что если все будут действовать так, то мир станет лучше (согласно вашим собственным (эгоистическим) представлениям). Второе слагаемое в формуле (1) отражает этот взгляд на мир: участник i до определенной степени k_i отождествляет себя с партнером. При $0 < k_i < 1$ полезность игрока i является выпуклой комбинацией эгоистической и кантианской полезностей, причем чем больше k_i, тем в большей степени для участника i важны моральные соображения, которые мотивируют его относиться к партнеру, как к самому себе.

Для игры DD имеем:

$$\pi(c_i, c_{-i}) = \begin{cases} c_i, & \text{если } c_1 + c_2 \le 1, \\ 0, & \text{если } c_1 + c_2 > 1. \end{cases} \tag{2}$$

Как и ранее, через $\mathbf{e}$ мы будем обозначать эгалитарное распределение $(1/2,\ 1/2)$. В этом разделе для игры DD мы всегда будем подразумевать, что участники игры DD имеют функции полезности (1). Нашей целью является исследование равновесий по Нэшу в игре DD в зависимости от степени моральности участников.

Пользуясь формулами (1) и (2), можно вычислить функцию *лучшего ответа* (best response) $BR_{k_i}(c_{-i})$ игрока i со степенью моральности k_i на выбор вторым игроком стратегии c_{-i}.

Предложение 10.

I. Для произвольных индексов моральности $k_1, k_2 \in [0,1]$ *распределение* $\mathbf{e} = (1/2,\ 1/2)$ *является равновесием по Нэшу в игре* DD.

II. Пусть $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ *– равновесие по Нэшу в игре* DD. *Если степень моральности хотя бы одного из игроков положительна, то* $c_1 + c_2 = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

I. Нетрудно проверить, что для $i = 1,\ 2$ и произвольного $k_i \in [0,\ 1]$ имеем $BR_{k_i}(1/2) = 1/2$.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

II. Если $k_1 = k_2 = 0$, то мы имеем стандартную игру DD и наше утверждение очевидно. Предположим, что, например, $k_1 > 0$, но существует равновесное по Нэшу распределение **c**, для которого $c_1 + c_2 \neq 1$. Тогда $c_1 \in BR_{k_1}(c_2)$ и нетрудно проверить, что если $c_1 \neq 1 - c_2$, то $c_1 = 1/2$, так что II) вытекает из доказательства I. ■

Исследуем сначала равновесия Нэша в случае, когда степень моральности обоих участников одинакова: $k_1 = k_2 = k \in [0, 1]$.

Если $k = 0$ (игроки эгоистичны), то каждый профиль **c**, для которого $c_1 + c_2 = 1$, является нэшевским равновесием. По тривиальной причине равновесием является также профиль $\mathbf{c} = (1,\ 1)$.

При $k = 1$ игроки озабочены лишь максимизацией $\pi(c, c)$. Ясно, что в этом случае $\mathbf{e} = (1/2,\ 1/2)$ — единственное равновесие по Нэшу.

Рассмотрим теперь случай $0 < k < 1$, в котором для участников важны как материальные, так и моральные стимулы, и пусть $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, $c_1 < c_2$ — нэшевское равновесие. Ввиду предложения 10 $c_1 + c_2 = 1$, а **e** является нэшевским равновесием. Согласно (1) и (2), при повышении ставки первого игрока с c_1 до $1/2$ его полезность меняется с $(1-k)c_1 + kc_1 = c_1$ на $k/2$, так что из определения нэшевского равновесия вытекает, что $c_1 \geq k/2$. Аналогично, при понижении ставки второго игрока до $1/2$ его полезность меняется с $(1-k)c_2$ на $1/2$, и, следовательно, $c_2 \geq 1/2(1-k)$ или, поскольку $c_2 = 1 - c_1$, $c_1 \leq (1-2k)/2(1-k)$. Нетрудно заметить, что другие изменения ставок не приводят к улучшению положения игроков. Мы приходим к следующему результату.

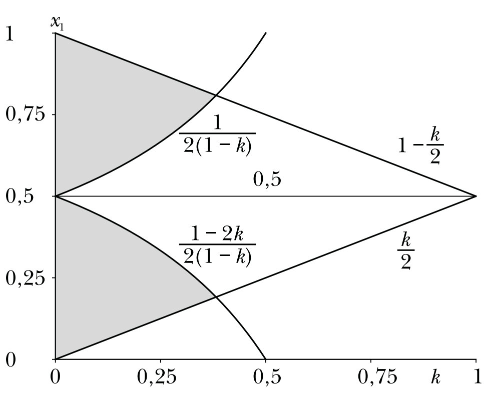

Рис. 3

Предложение 11. *Множество равновесий Нэша в игре DD двух участников с одинаковым уровнем нравственности* $0 < k \leq 1$ *состоит из вектора* $\mathbf{e} = (1/2, 1/2)$ *и множества пар* (c_1, c_2) *таких, что* $c_1 + c_2 = 1$, $k/2 \leq \min\{c_1, c_2\} \leq$ $\leq (1-2k)/(2-2k)$.

На рис. 3 заштрихованы области равновесий Нэша c_1 для первого участника в зависимости от k для случая $k = k_1 = k_2$ (напомним, что $c_2 = 1 - c_1$). Из графика на рис. 3 можно сделать следующие выводы.

Замечание 5.

I. При $k = 0$ равновесия заполняют отрезок $[0,\ 1]$, а по мере возрастания k множество равновесных требований уменьшается. Наконец, при $\underline{k}/2 = (1-2\underline{k})/(2-2\underline{k})$, где $\underline{k} = (3-\sqrt{5})/2$ — точка пересечения гиперболы и прямой на графике, помимо **e** существуют ровно два (симметричных) равновесия Нэша, а если $\underline{k} < k \leq 1$, то **e** — единственное нэшевское равновесие.

II. Интересно, что при (относительно) небольших k профили с большим неравенством между участниками равновесны, в то время как при (относительно) больших k профили с малым неравенством таковыми не являются. Дело в том, что в первом случае при $k < 2\Delta/(2\Delta+1)$, $\Delta = c_1 - 1/2$ материальный проигрыш $(1-k)\Delta$, игрока со ставкой $c_1 > c_2$ при снижении ставки до $1/2$

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

не компенсируется дополнительным моральным удовлетворением $k/2$, и профиль $(c_1, 1-c_1) = (c_1, c_1 - 2\Delta)$ равновесен. Во втором же случае при $k > 2\Delta/(2\Delta+1)$ дополнительный материальный ущерб $(1-k)\Delta$, который игрок с бóльшим требованием получает, снижая ставку до $1/2$, меньше морального удовлетворения $k/2$, так что в указанной области профиль (c_1, c_2), $c_2 = c_1 - 2\Delta$ неравновесен. Разница между этими двумя случаями в том, что при возрастании неравенства 2Δ от 0 до 1 граничное значение $k = 2\Delta/(2\Delta+1)$ возрастает от 0 до $1/2$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда в игре DD моральный уровень первого игрока $0 \le k_1 \le 1$, второго — $0 < k_2 \le 1$. Поскольку исследование равновесий в предложении 11 сводится к вычислению функций наилучшего ответа BR, те же методы позволяют описать множество равновесий Нэша в неоднородном случае.

Предложение 12. *Множество равновесий Нэша состоит из* **e** *и всех пар* (c_1, c_2) *таких, что* $c_1 + c_2 = 1$ *и либо* $k_1/2 \le c_1 \le (1-2k_2)/(2-2k_2) = 1 - 1/2(1-k_2)$, *либо* $k_2/2 \le c_2 \le (1-2k_1)/(2-2k_1) = 1 - 1/2(1-k_1)$.

Заметим, что при $k_1 = k_2$ предложение 12 сводится к предложению 11.

Множество равновесий зависит от двух параметров k_1 и k_2, и изобразить его на плоскости затруднительно. На рис. 4 заштриховано множество равновесных стратегий c_1 первого участника в случае, если он эгоистичен (т.е. $k_1 = 0$), а моральный уровень второго участника k_2 содержится в интервале $(0,\ 1]$ (поскольку $c_1 + c_2 = 1$, нэшевское равновесие (c_1, c_2) однозначно восстанавливается по соответствующей равновесной стратегии любого из игроков).

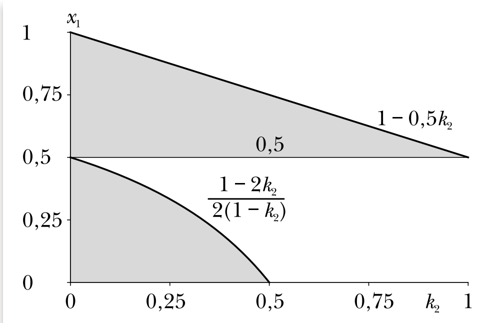

Рис. 4

Из рис. 4 нетрудно сделать следующие выводы.

Замечание 6.

I. Как и в предложении 11, с возрастанием k_2 множество равновесий уменьшается. Если $k_2 < 1/2$, то множество равновесий несвязно и состоит из двух отрезков, в одном из которых $c_1 < 1/2$, а в другом $c_1 > 1/2$. При $k_2 = 1/2$ нижний отрезок вырождается в точку $(0,\ 1)$ (которая равновесна при всех $k_2 \le 1/2$), а при $k_2 > 1/2$ (т.е. если нравственность второго участника находится на высоком уровне) первый (эгоистичный) участник получает не меньше пятидесяти центов.

II. Наибольшая полезность, которую эгоистичный участник может получить, отрицательно коррелирует с уровнем нравственности партнера.

III. Наихудшее равновесие для эгоистичного игрока равно нулю при $k_2 \le 1/2$ и совпадает с эгалитарным при $k_2 > 1/2$.

Таким образом, повышение нравственности партнера оказывает противоречивое влияние на благосостояние эгоистичного участника: с одной стороны, уменьшается его максимальный выигрыш, а с другой — увеличивается минимальный. Интересно было бы проверить экспериментально, предпочитает ли эгоистичный участник играть с эгоистичным или нравственным (или высоконравственным) партнером.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

До сих пор речь шла об игре двух лиц с разными уровнями нравственности. Однако интереснее исследовать влияние структуры общества на результирующее распределение. Рассмотрим простейший случай, когда общество состоит из двух типов агентов: доля агентов первого типа с моральным уровнем $0 \le \underline{k} < 1$ составляет $0 < p < 1$, а остальные агенты (их доля $1-p$) имеют моральный уровень $\overline{k} > \underline{k}$. Будем считать, что все агенты осведомлены о величинах p, $\underline{k}$ и $\overline{k}$, но когда два случайным образом выбранных агента участвуют в игре DD, им известен свой тип, но не тип партнера.

Таким образом, мы приходим к байесовской игре двух лиц, (симметричная чистая) стратегия s_i игрока i, $i=1,\ 2$ в которой определяется парой точек $\left(s_{i,\underline{k}}, s_{i,\overline{k}}\right)$ в квадрате $[0,\ 1]^2$, причем полезность участника i задается формулой (1).

Определение 8. Стратегия $s=\left(s_{\underline{k}}, s_{\overline{k}}\right)$ равновесна по Нэшу, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} s_{\underline{k}} &\in \left(1-\underline{k}\right)\underset{c\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\left(p\pi\left(c, s_{\underline{k}}\right)+\left(1-p\right)\pi\left(c, s_{\overline{k}}\right)+\underline{k}\pi\left(c,c\right)\right), \\ s_{\overline{k}} &\in \left(1-\overline{k}\right)\underset{c\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\left(p\pi\left(c, s_{\underline{k}}\right)+\left(1-p\right)\pi\left(c, s_{\overline{k}}\right)+\overline{k}\pi\left(c,c\right)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что, поскольку мы ищем симметричные равновесия, индекс i в определении 8 опущен.

Следующее предложение показывает, что свойства (симметричных) байесовских равновесий по Нэшу аналогичны свойствам детерминированных равновесий, описанных в предложении 10.

Предложение 13.

I. Для произвольных $\underline{k} \in \left[0,\ 1\right)$, $\overline{k} > \underline{k}$ и $p \in \left(0,\ 1\right)$ стратегия $s_{\underline{k}} = s_{\overline{k}} = 1/2$ является (симметричным) байесовским равновесием по Нэшу.

II. Если $\left(s_{\underline{k}}, s_{\overline{k}}\right)$ – равновесная по Нэшу (симметричная) байесовская стратегия, то $s_{\underline{k}} + s_{\overline{k}} = 1$.

Следующее предложение показывает, что в байесовской игре не существует (симметричных) равновесных стратегий, при которых более нравственные участники получают больше, чем более эгоистичные.

Предложение 14. *Если $\left(s_{\underline{k}}, s_{\overline{k}}\right) \in [0,1]^2$ – (симметричная) равновесная стратегия в байесовской игре, то $s_{\underline{k}} + s_{\overline{k}} = 1$ и либо $s_{\underline{k}} = s_{\overline{k}} = 1/2$, либо $s_{\underline{k}} > s_{\overline{k}}$.*

Доказательство. Предположим, что существует равновесие с $s_{\overline{k}} > s_{\underline{k}}$. Согласно предложению 13.II, $s_{\overline{k}} + s_{\underline{k}} = 1$, а следовательно, $s_{\overline{k}} > 1/2$, $s_{\underline{k}} < 1/2$. Согласно формулам (3), при выборе игроками таких стратегий ожидаемая полезность участника с $k=\underline{k}$ составляет $\left(1-\underline{k}\right)\left(ps_{\underline{k}}+\left(1-p\right)s_{\underline{k}}\right)+\underline{k}s_{\underline{k}} = s_{\underline{k}} = 1-s_{\overline{k}}$, а участника с $k=\overline{k}$ – $p\left(1-\overline{k}\right)s_{\overline{k}}$. В равновесии игрокам невыгодно отклоняться от своих стратегий. Если участник с $k=\underline{k}$ поднимет ставку с $s_{\underline{k}}$ до $s_{\overline{k}}$, его ожидаемая полезность составит $p\left(1-\underline{k}\right)s_{\overline{k}}$, так что из равновесности стратегии $s=\left(s_{\underline{k}}, s_{\overline{k}}\right)$ вытекает, что $s_{\overline{k}} \le 1/\left(p\left(1-\underline{k}\right)+1\right)$. Если же игрок с $k=\overline{k}$ опустит ставку с $s_{\overline{k}}$ до $s_{\underline{k}}$, то ожидаемый выигрыш равен $s_{\underline{k}}$, так что из равновесности вытекает, что $s_{\overline{k}} \ge 1/\left(p\left(1-\overline{k}\right)+1\right)$. Однако при $\overline{k} > \underline{k}$ для всех $p>0$ выполнено неравенство $1/\left(p\left(1-\overline{k}\right)+1\right) > 1/\left(p\left(1-\underline{k}\right)+1\right)$ и два вышеуказанных условия противоречат друг другу. ■

Полное описание равновесий при всех значениях $\underline{k}$, $\overline{k}$ и p довольно затруднительно, но случай, когда $\underline{k}=0$, т.е. игроки первого типа эгоистичны,

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

легко поддается анализу. Предложение 14 показывает, что во всех равновесиях эгоистичные игроки получают не меньше половины разыгрываемого имущества. Оказывается, что при $\underline{k}=0$ неэгалитарные равновесные стратегии существуют лишь при определенных $\overline{k}$ и p.

Предложение 15. *Множество (симметричных) равновесных нэшевских стратегий байесовской игры с* $\underline{k}=0$ *состоит из всех стратегий* $\left(s_0, s_{\overline{k}}\right) \in [0,\ 1]^2$ *таких, что* $s_0 + s_{\overline{k}} = 1$ *и*

$$s_0 = s_{\overline{k}} = 1/2, \text{ если } k > 1/2,$$

$$s_0 = s_{\overline{k}} = 1/2, \text{ если } k < 1/2,$$

$$s_0 = s_{\overline{k}} = 1/2 \text{ или } 1/(2-p) \le s_0 \le 1/2 + p\left(1-\overline{k}\right)/2,$$

$$\text{если } \overline{k} \le 1/2 \text{ и } 0 \le p \le (1-2\overline{k})/\left(1-\overline{k}\right).$$

Доказательство. Доказательство использует предложение 13 и, как и доказательство предложения 14, основано на оценке выгодности отклонений участников от равновесных стратегий. ■

Замечание 7. Эгоистичному участнику не так просто получить в равновесии более пятидесяти центов. С одной стороны, в равновесии с $s_0 > s_{\overline{k}}$ его полезность равна нулю с вероятностью p (т.е. с вероятностью того, что его партнер тоже является эгоистом). Поэтому с возрастанием p увеличивается стимул отклониться от такой стратегии. С другой стороны, как и в случае с полной информацией, с ростом $\overline{k}$ возрастает также наименьшее из $s_{\overline{k}}$, для которых у участников с $k=\overline{k}$ нет стимула увеличить свой запрос до 1/2. Это рассуждение дает интуитивное обоснование предложения 15, суть которого состоит в следующем. Если моральный уровень нравственных членов общества достаточно высок или их доля достаточно мала, то единственной равновесной стратегией является эгалитарная, в противном же случае существует равновесная стратегия, обеспечивающая эгоистам выигрыш больший, чем у нравственных участников.

7. Кантовское равновесие в задаче о банкротстве

До сих пор мы обсуждали попытки приспособить понятие равновесия по Нэшу к исследованию различных обобщений игры DD, использующих правила банкротства. Однако если функции полезности участников эгоистические, нэшевское равновесие плохо приспособлено для объяснения выбора согласованных стратегий. В то же время, как мы уже отмечали, эксперименты показывают, что в DD и родственных играх участники склонны выбирать профили, близкие к эгалитарному. В предыдущем разделе мы описали попытки разрешить это противоречие в рамках нэшевской парадигмы, однако для этого пришлось модифицировать функции полезности на основании тех или иных этических воззрений участников. Однако известно, что нэшевские равновесия имеют ряд недостатков, в частности, они могут не быть эффективными. Да и вообще довольно странно предполагать, что в ответ на изменение стратегии игрока партнер не меняет своей стратегии.

Развивая пионерскую идею Ж.-Ж. Лаффона (Laffont, 1975), Дж. Ремер в цикле работ (Roemer, 2010, 2015, 2019) предложил концепцию *кантовской оптимизации*. В отличие от нэшевской оптимизации, в которой каждый участник выбирает стратегию в предположении бездействия партнеров, при кантовской

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

оптимизации игроки спрашивают себя: «Если я отклонюсь от своей стратегии и все остальные участники отклонятся от своих стратегий *аналогичным образом*, то предпочту ли я новое состояние?». Таким образом, каждый участник рассматривает только *универсальные, всеобщие отклонения* (отсюда и название, апеллирующее к *категорическому императиву* Канта). Кантовская оптимизация объясняет проявляющееся и в реальной жизни, и в многочисленных экспериментах *кооперативное* поведение игроков, а *кантовские равновесия,* к которым она приводит, обладают перед нэшевскими тем преимуществом, что они *Парето оптимальны* (Зак, 2021, § 2). К недостаткам ремеровского подхода относится узкая область применимости: приходится предполагать, что экономические агенты более или менее однородны, а их стратегии скалярны. При этом в зависимости от характера (воображаемой) модификации стратегий рассматриваются два типа кантовских равновесий: мультипликативное (чаще) и аддитивное. В этом разделе, следуя статье (Dizarlar, Karagözoğlu, 2023), мы опишем кантовские равновесия в задаче о банкротстве.

Определение 9. Рассмотрим игру заявок с правилом распределения F, описанную в п. 2.1.

I. Профиль $\mathbf{c}$ является мультипликативным кантовским равновесием, если для всех i, $1 \le i \le n$ и всех $\alpha > 0$ выполнено неравенство $F_i(\mathbf{c};E) \ge F_i(\alpha\mathbf{c};E)$.

II. Профиль $\mathbf{c}$ является аддитивным кантовским равновесием, если для всех i, $1 \le i \le n$ и всех $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых $\mathbf{c} + \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n_+$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha,\ldots,\alpha)$, выполнено неравенство $F_i(\mathbf{c};E) \ge F_i\ (\mathbf{c} + \boldsymbol{\alpha};\ E)$.

Очевидно, что если $\mathbf{c}$ (мультипликативное или аддитивное) кантовское равновесие, то $\mathbf{c}$ оптимально по Парето.

Перейдем к более подробному исследованию мультипликативных кантовских равновесий. Прежде всего из монотонности предпочтений участников следует, что $\mathbf{c}$ является кантовским равновесием если и только если $F_i(\mathbf{c};E) = F_i(\alpha\mathbf{c};E)$ для каждого $i = 1,\ldots,n$ и всех $\alpha > 0$, для которых $\alpha C \ge E$.

Пример 1.

I. В игре DD каждый профиль, для которого $C = E$, является равновесным и по Нэшу, и по Канту.

II. В игре заявок с пропорциональным правилом P каждый профиль, для которого $C = E$, равновесен по Нэшу. Аналогично, вектор $\mathbf{m}$ является равновесием по Нэшу с ограничением M (см. замечание 3.IV). Однако равновесий по Канту гораздо больше: из предложения 1 вытекает, что **каждый** профиль $\mathbf{c}$ равновесен по Канту. Дело в том, что при нэшевском подходе разные участники рассматривают (воображаемую) оптимизацию в разных подмножествах, а при кантовском — в одном и том же (в мультипликативном случае речь идет о луче, исходящем из требований, продолжение которого проходит через начало координат), что приводит к усилению неопределенности при применении пропорционального правила банкротства.

Ясно, что всякое кантовское равновесие $\mathbf{c}^*$ эффективно (т.е. $\sum_i R_i(c_i^*;E) = E$) и если $\beta > 0$ и $\beta C^* \ge E$, то профиль $\beta\mathbf{c}^*$ также является кантовским равновесием.

При довольно слабых предположениях существование кантовского равновесия почти тавтологично.

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Предложение 16. *В игре заявок с произвольным правилом* R, *удовлетворяющим аксиоме (ETE), всегда существует кантовское равновесие: таковым является произвольный вектор равных требований* $\alpha\mathbf{e}$, *где* $\mathbf{e}=(E/n,\ldots,E/n)$, *а* $\alpha\geq 1$.

Сколько кантовских равновесий существует для данного правила банкротства? В примере 1.II мы видели, что для пропорционального правила P каждый профиль $\mathbf{c}$, для которого $C\geq E$, является кантовским равновесием. А вот пример противоположного свойства.

Предложение 17. *В игре заявок с правилом CEA все кантовские равновесия пропорциональны вектору равных требований* $\mathbf{e}=(E/n,\ldots,E/n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним (см. пп. 2.3.2), что $CEA_i(\mathbf{c};E)=E/n$, если $c_j\geq E/n$ для всех $j=1,\ldots,n$. Положим $c_j=\min_i\{c_i\}$ и предположим, что $c_j<E/n$. Тогда игроку j выгодно увеличить свои требования в $\alpha>E/(nc_j)$ раз, так что профиль, в котором минимальное требование меньше E/n, не может быть кантовским равновесием. Пусть теперь $c_k=\max_i\{c_i\}$, и предположим, что $c_k>E/n$, а $E/n\leq c_j<c_k$. Тогда игроку k выгодно уменьшить все требования, домножив их на положительное число β, немного меньшее $E/(nc_j)$, так что профиль, в котором максимальное требование больше E/n, также не может быть кантовским равновесием.

Замечание 8.

I. Заметим, что нэшевские равновесия для правила CEA — это профили $\mathbf{c}$ такие, что $c_i\geq E/n$, $i=1,\ldots,n$.

II. Изменяя правило CEA на луче, порожденном $\mathbf{e}=(E/n,\ldots,E/n)$, нетрудно построить пример правила банкротства, для которого вообще не существует кантовских равновесий (при этом, разумеется, нарушается аксиома ETE (Dizarlar, Karagözoğlu, 2023, Example A2)).

Условие *непропорциональности при неравных требованиях* (no proportionality for unequal claims vectors, NPUC) полностью исключает пропорциональные распределения, ответственные за множественность кантовских равновесий, и сводит эту множественность до минимума (т.е. до множества профилей, пропорциональных вектору равных требований).

Аксиома NPUC. *Правило банкротства* R *удовлетворяет условию NPUC, если для всякого вектора требований* $\mathbf{c}$, *не пропорционального* $\mathbf{e}$, *существует участник* i, *для которого* $R_i(\mathbf{c};E)\neq P_i(\mathbf{c};E)$.

Предложение 18. *При использовании правила банкротства* R, *удовлетворяющего условиям ETE и NPUC, все кантовские равновесия в игре* $\Gamma(R)$ *пропорциональны вектору равных требований* $\mathbf{e}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, рассуждая, как при доказательстве предложения 17, убеждаемся в том, что если $\mathbf{c}\not\sim\mathbf{e}$ — кантовское равновесие, то $R_i(\mathbf{c};E)\neq R_j(\mathbf{c},E)$ для некоторой пары индексов $1\leq i,\ j\leq n$. Следовательно, $\mathbf{e}=(E/n,\ldots,E/n)$ не может быть кантовским равновесием для $\mathbf{c}\not\sim\mathbf{e}$ (это так и без предположения NPUC). Осталось рассмотреть случай $R(\mathbf{c};E)\not\sim\mathbf{e}$, в котором из NPUC вытекает существование такого i, что $R_i(\mathbf{c};E)>c_iE/C$. В этом случае, как и при доказательстве предложения 17, существует участник i, для которого при подходящем $\alpha>0$ имеем $R_i(\alpha\mathbf{c};E)>R_i(\mathbf{c};E)$, так что $\mathbf{c}$ не является кантовским равновесием. ■

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Условие NPUC довольно ограничительно, поскольку для многих правил банкротства существует несколько (но не слишком много) непропорциональных векторов требований, на которых это правило совпадает с пропорциональным. Примером служит талмудическое правило, которое при $C = 2E$ дает выигрыши $c_1 / 2, \ldots, c_n / 2$. Чтобы усилить предложение 18 и охватить более широкий класс правил банкротства, условие NPUC можно ослабить до условия *слабой непропорциональности при неравных требованиях* (weak no proportionality for unequal claims vectors, WNPUC), которое все еще гарантирует отсутствие кантовских равновесий с неравными требованиями участников.

Аксиома WNPUC. *Правило банкротства R удовлетворяет условию WNPUC, если для всякого вектора требований* $\mathbf{c}$, *не пропорционального* $\mathbf{e} = (E / n, \ldots, E / n)$, *существуют участник i и число* $\alpha^* > 0$, *для которых* $R_i(\alpha^* \mathbf{c}; E) \neq P_i(\alpha^* \mathbf{c}, E)$.

Пример 2. Талмудическое правило T, а также правила *CEA* и *CEL* удовлетворяют условию WNPUC.

Предложение 19. *При использовании правила банкротства R, удовлетворяющего условиям ETE и WNPUC, все кантовские равновесия в игре* $\Gamma(R)$ *пропорциональны вектору равных требований* $\mathbf{e}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно повторить (с очевидными модификациями) аргументы, использованные при доказательстве предложения 18. ■

Таким образом, если ограничиться правилами, удовлетворяющими условию ETE, то на одном полюсе находится пропорциональное правило P, для которого каждый профиль является кантовским равновесием, а на другом полюсе — правила, удовлетворяющие условию WNPUC, для которых все кантовские равновесия пропорциональны вектору равных требований. Представляет интерес найти промежуточные правила, обеспечивающие плавный переход между этими крайностями. Следующий очевидный пример показывает, как можно испортить хорошее правило, заменив его на пропорциональное на произвольном луче требований.

Пример 3. Пусть $\tilde{\mathbf{c}} \not\sim \mathbf{e}$, и пусть $\tilde{R}$ — произвольное правило, удовлетворяющее условиям ETE и WNPUC. Определим правило банкротства R следующим образом:

$$R(\mathbf{c}; E) = \begin{cases} P(\mathbf{c}; E), \text{ если } \mathbf{c} \sim \tilde{\mathbf{c}}, \\ \tilde{R}(\mathbf{c}; E), \text{ если } \mathbf{c} \not\sim \tilde{\mathbf{c}}. \end{cases}$$

Тогда множество кантовских равновесий для правила R состоит из двух лучей, порожденных векторами $\tilde{\mathbf{c}}$ и $\mathbf{e}$.

Пример 4. Пусть L — произвольное линейное подпространство n-мерного (вещественного) линейного пространства требований $\mathbf{C}$. Проводя итерацию построения из примера 3, можно построить правило банкротства R_L такое, что:

i) ограничение R_L на ортант L_{++} строго положительных векторов из L совпадает с пропорциональным правилом P;

ii) ограничение R_L на допустимые векторы требований из $\mathbf{C} \setminus (L \cup R_{++}\mathbf{e})$ удовлетворяет условиям ETE и WNPUC.

Предложение 20. *В обозначениях, введенных в примере 5, множество кантовских равновесий в игре* $\Gamma(R_L)$ *совпадает с множеством* $L_{++} \cup \mathbb{R}_{++}\mathbf{e}$ *(и совпадает с* L_{++}, *если* $\mathbf{e} \in L$*).*

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Перейдем к краткому описанию свойств аддитивных кантовских равновесий (см. определение 9.II).

Как и в случае мультипликативного кантовского равновесия, аддитивное кантовское равновесие **c** эффективно (т.е. $C = E$). Кроме того, имеет место (доказываемый точно так же) следующий аналог предложения 16.

Предложение 21. *Если правило банкротства R удовлетворяет аксиоме ETE, то в игре $\Gamma(R)$ существует аддитивное кантовское равновесие, а именно таковым является каждый вектор равных требований $\mathbf{e} + \boldsymbol{\alpha}$, где $\alpha > 0$.*

Роль, которую играют аксиома PICI и правило P в теории мультипликативного кантовского равновесия, в теории аддитивного кантовского равновесия играют аксиома UICI и правило *CEL*. Следующий пример аналогичен примеру 1 (II).

Пример 5. В игре $\Gamma(CEL)$ каждый профиль **c**, для которого $C \geq E$, является аддитивным кантовским равновесием.

Как и в случае мультипликативного кантовского равновесия, можно сформулировать свойство *неравных убытков при неравных требованиях* (No equal losses for unequal claims, NELUC), позволяющее исключить аддитивные кантовские равновесия, отличные от профилей с равными требованиями.

Аксиома NELUC. *Правило банкротства R удовлетворяет условию NELUC, если для всякого вектора требований $\mathbf{c} \not\approx \mathbf{e}$ существует участник i, для которого $R_i(c;\, E) > c_i - (C - E) / n$.*

Нетрудно убедиться, что правила *CEA* и P (а также любая (отличная от *CEL*) выпуклая комбинация правил *CEA*, *CEL* и P) удовлетворяют аксиоме NELUC. Рассуждая, как при доказательстве предложения 18, мы видим, что справедливо следующее предложение.

Предложение 22. *Пусть R – правило банкротства, обладающее свойствами ETE и NELUC. Тогда все аддитивные кантовские равновесия являются векторами равных требований.*

Заключение

В последние десятилетия становится все более очевидной недостаточность, а иногда и неадекватность характерного для классической математической экономики представления о рациональном экономическом агенте, принимающем решения, основываясь на максимизации узко понятой материальной выгоды. Многочисленные эксперименты, направленные на проверку гипотезы рациональности в простейших ситуациях, таких как игры «Диктатор», «Ультиматум» и «Подели доллар», показывают, что поведение участников значительно сложнее, чем предсказывает предположение о максимизации прибыли. Объяснение этих результатов следует искать не только в (умозрительном) восприятии игры как многократно повторяющейся, но и в особенностях психологии и морали, а шире — в коллективистской сущности homo sapiens. Подлинный прогресс в понимании поведения участников подобных игр может быть достигнут только на основе мультидисциплинарных исследований, в которых, помимо экономики, задействованы социология, психология и даже биология развития и генетика. При этом не обойтись без использования таких сложных понятий, как «справедливость» и «альтруизм». Однако это не умаляет роли математических моделей, которые позволяют изолировать и исследовать различные составляющие многофакторного процесса принятия решений.

В настоящем обзоре мы попытались дать представление о некоторых недавних работах из потока публикаций в области моделирования задач, сходных с DD. Несмотря на то что задача DD кажется довольно специальной, в ней и ее обобщениях проявляются характерные черты нерационального поведения акторов во многих других ситуациях. Рассмотренные модели объединяет то, что основаны они не только на умозрительных заключениях, но и на эмпирических данных. Данная тематика еще не устоялась, но тем интереснее следить за ее развитием. Мы надеемся, что, ознакомившись с настоящим обзором, читатель получит некоторое представление об этом круге проблем и, может быть, задумается о том, чтобы подключиться к исследованиям в этой области.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

Зак Ф.Л. (2021). О некоторых моделях альтруистического поведения // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 1 (49). С. 12–52. DOI: 10.31737/2221-2264-2021-49-1-1 [**Zak F.L.** (2021). On some models of altruistic behavior. *Journal of the New Economic Association*, 1 (49), 12–52. DOI: 10.31737/2221-2264-2021-49-1-1 (in Russian).]

Полтерович В.М. (2015). От социального либерализма — к философии сотрудничества // *Общественные науки и современность*. № 4. С. 41–64. ISBN: 0869-0499 [**Polterovich V.M.** (2015). From social liberalism towards the philosophy of collaboration. *Social Sciences and Contemporary World*, 4, 41–64. ISBN: 0869-0499 (in Russian)].

Полтерович В.М. (2016). Позитивное сотрудничество: факторы и механизмы эволюции // *Вопросы экономики*. № 11. С. 5–23. DOI: 10.32609/0042-8736-2016-11-5-23 [**Polterovich V.M.** (2016). Positive collaboration: Factors and mechanisms of evolution. *Voprosy Ekonomiki*, 11, 5–23. DOI: 10.32609/0042-8736-2016-11-5-23 (in Russian)].

Alger I., Weibull J. (2013). Homo moralis — preference evolution under incomplete information and assortative matching. *Econometrica*, 81, 2269–2302. DOI: 10.3982/ECTA11711

Alger I., Weibull J. (2017). Strategic behavior of moralists and altruists. *Games*, 8 (3), 38. DOI: 10.3390/g8030038

Ashlagi L., Karagözoğlu E., Klaus B.-E. (2012). A non-cooperative support for equal division in estate division problems. *Mathematical Social Sciences*, 63, 228–233. DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2012.01.004

Aumann R., Maschler M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, 36, 195–213. DOI: 10.1016/0022-0531 (85)90102-4

Becker G.S. (1991). A treatise on the family. Enlarged edition. Cambridge, London: Harvard University Press. ISBN: 0-674-90698-5.

Brams S.J., Taylor A.D. (1994). Divide the dollar: Three solutions and extensions. *Theory and Decision*, 37, 211–231. DOI: 10.1007/BF01079266

Cappelen A.W., Luttens R.I., Sorensen E.O., Tungodden B. (2019). Fairness in bankruptcies: An experimental study. *Management Science*, 65, 2832–2841. DOI: 10.1287/mnsc.2018.3029

Dizarlar A., Karagözoğlu E. (2023). Kantian equilibria of a class of Nash bargaining games. *Journal of Public Economic Theory*, 25, 867–889. DOI: 10.1111/jpet.12638

Журнал НЭА, № 1 (70), 2026, с. 12–46

Edgeworth F.Y. (1881). *Mathematical psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences.* London: Kegan Paul.

Fehr E., Schmidt K. (1999). A theory of fairness, competition, and cooperation. *Quart J. Econ.*, 114, 817–868. DOI: 10.1162/003355399556151

Juan-Bartoli P., Karagözoğlu E. (2024a). Moral preferences in bargaining. *Economic Theory.* DOI: 10.1007/s00199-023-01544-7

Juan-Bartoli P., Karagözoğlu E. (2024b). Online supplementary material: Moral preferences in bargaining. Available at: https://static-content.springer.com/esm/art%3A10.1007%2Fs00199-023-01544-7/MediaObjects/ 199_2023_1544_MOESM1_ESM.pdf

Karagözoğlu E., Keskin K., Sağlam Ç. (2023). (In)efficiency and equitability of equilibrium outcomes in a family of bargaining games. *International Journal of Game Theory,* 52, 175–193. DOI: 10.1007/s00182-022-00814-3

Laffont J.-J. (1975). Macroeconomic constraints, economic efficiency and ethics: An introduction to Kantian economics. *Economica,* 42, 430–437. DOI: 10.2307/2553800

Nash J.F. (1953). Two person cooperative games. *Econometrica,* 21, 128–140. DOI: 10.2307/1906951

Newman P. (ed.) (2003). *F. Y. Edgeworth: Mathematical psychics and further papers on political economy.* Oxford: Oxford University Press. ISBN: 0-19-828712-7.

Nydegger R.V., Owen G. (1975). Two person bargaining: An experimental test of Nash axioms. *International Journal of Game Theory,* 3, 239–249. DOI: 10.1007/bf01766877

Roemer J.E. (2010). Kantian equilibrium. *Scandinavian Journal of Economics,* 112, 1–24. DOI: 10.1016/jpubeco.2014.03.011

Roemer J.E. (2015). Kantian optimization: A microfoundation for cooperation. *Journal of Public Economics,* 127, 45–57. DOI: 10.1111/j.1467-9442.2009.01592.x

Roemer J.E. (2019). *How we cooperate: A theory of Kantian optimization.* New Haven, London: Yale University Press. DOI: 10.2307/j.ctvfc52jk

Roth A.E., Malouf W.K. (1979). Game-theoretic models and the role of information in bargaining. *Psychological Review,* 86, 574–594. DOI: 10.1037/0033-295x.86.6.574

Satterthwaite M., Sonnenschein H. (1981). Strategy-proof allocation mechanisms at differentiable points. *Review of Economic Studies,* 48, 587–597. DOI: 10.2307/2297198

Thomson W. (2003). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: A survey. *Mathematical Social Sciences,* 45 (3), 249–297. ISSN: 0165–4896. DOI: 10.1016/S0165-4896 (02)00070-7

Thomson W. (2019). *How to divide when there isn't enough.* Econometric Society Monographs Series. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/9781108161107

Поступила в редакцию 30.11.2024

Received 30.11.2024

Журнал НЭА,
№ 1 (70), 2026,
с. 12–46

F.L. Zak
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Estate division problem: In search of a fair mechanism[5]

Abstract. In the Nash Divide-the-Dollar (DD) game, n agents simultaneously submit claims on an estate of size E. If the total claim does not exceed E, each agent receives the amount requested; otherwise, all agents receive zero. The set of Nash equilibria coincides with the simplex of n-tuples of non-negative numbers summing to E. However, it is intuitively clear — and confirmed by experiments — that an equal division of the estate among the participants is the most reasonable and fair outcome. A large body of literature is devoted to resolving this tension by considering various mathematical models. Owing to its simplicity, the DD game serves as a prototype for many problems in which the question arises whether the standard tools of mathematical economics — such as different notions of equilibrium — can be modified to explain empirical data reflecting the idea of fairness. In this survey article we review various modifications of the DD game, including those based on non-selfish preferences and bankruptcy rules. We discuss Nash and Kant equilibria (multiplicative and additive), models with restricted demands and penalties, as well as utility functions reflecting different degrees of morality and inequality aversion.

Keywords: *divide-the-dollar (DD) game, bankruptcy problem, bankruptcy rule, Nash equilibrium, Kant equilibrium, inequality aversion, homo moralis.*

JEL Classification: C02, C62, C65, C78, D61, D62, D63.

For reference: **Zak F.L.** (2026). Estate division problem: In search of a fair mechanism. *Journal of the New Economic Association*, 1 (70), 12–46 (in Russian).

DOI: 10.31737/22212264_2026_1_12-46

EDN: TLSTWX

[5] The author thanks V.M. Polterovich for useful discussions and constructive criticism, and the anonymous referee for an exceptionally careful reading of the paper and valuable suggestions that helped improve the exposition.