

М.С. Зехов

НИУ «Высшая школа экономики», Москва

Н.П. Пильник

НИУ «Высшая школа экономики», ФИАН им. П.Н. Лебедева РАН, НИФИ
Министерства финансов РФ, Москва

С.А. Радионов

ФИАН им. П.Н. Лебедева РАН, НИУ «Высшая школа экономики», Москва

Построение множества равновесных цен в обобщенной модели распределенных рынков

Аннотация. В статье рассматривается обобщенная модель пространственно распределенных потребителей и производителей (distributed market model), позволяющая описывать распределение объемов производства и продаж, а также цены на географически удаленных рынках товаров. Взаимодействие агентов в модели описывается в терминах экономического равновесия, в котором агенты решают свои оптимизационные задачи и их решения должны быть согласованы. Производители в модели характеризуются производственными мощностями и издержками производства, потребители — объемами спроса. Для описания взаимодействия потребителей с производителями задана матрица логистических издержек доставки единицы товара от каждого производителя к каждому потребителю. Доказано существование равновесия в модели при выполнении некоторых условий регулярности и предложен конечный алгоритм, позволяющий описать множество равновесных цен и объемов. Модель может быть использована для исследования эффектов изменения параметров спроса и предложения (например, в результате роста экономики или инвестиций в производство), а также логистической структуры рынка (например, в результате санкций).

Ключевые слова: логистика, пространственные модели, задача производителя, олигополия, конкуренция.

Классификация JEL: D40, L11.

Для цитирования: **Зехов М.С., Пильник Н.П., Радионов С.А.** (2025). Построение множества равновесных цен в обобщенной модели распределенных рынков // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 2 (67). С. 25–44.

DOI: 10.31737/22212264_2025_2_25-44

EDN: WFMGDХ

1. Введение

В работе (Pilnik, Radionov, Tipunin, 2025) была представлена модель рынков, в которой производители, действующие в соответствии с некоторыми условиями рациональности, должны удовлетворить спрос пространственно распределенных потребителей. Производители в модели характеризуются производственными мощностями и издержками производства, потребители — объемами спроса, задана матрица логистических издержек доставки единицы товара от каждого производителя к каждому потребителю. Важно отметить, что спрос в модели предполагается инерционным и хорошо прогнозируемым. Данная модель изначально разрабатывалась для описания рынков удобрений, которые

обладают этим свойством, поскольку спрос агропромышленных предприятий на удобрения зависит главным образом от площади пахотных земель.

Основной предмет исследования – векторы цен, являющиеся решениями задач минимизации и максимизации цен при некоторых условиях рациональности производителей и других ограничениях на функционирование рынка. В (Pilnik, Radionov, Tipunin, 2025) доказано существование решений данных задач при определенных условиях на параметры модели, представлены алгоритмы расчета минимальных и максимальных цен и доказана их конечность, а также получен ряд результатов, характеризующих эти цены. Далее эта модель будет называться базовой.

В данной работе мы рассматриваем обобщение модели, представленной в (Pilnik, Radionov, Tipunin, 2025). Основные отличия обобщенной модели состоят в следующем. Во-первых, логистические и производственные издержки описываются произвольными дифференцируемыми функциями вместо линейных. Во-вторых, вводится нетривиальная целевая функция потребителя. Тем самым анализируются оптимизационные задачи потребителей и производителей, близкие к стандартным микроэкономическим постановкам (см., например, (Mas-Colell et al., 1995)), используемым в том числе для микрообоснования макроэкономических моделей (см., например, (Christiano, Eichenbaum, Evans, 2005; Smets, Wouters, 2003, 2007)). В-третьих, в обобщенной модели равновесия агенты решают свои оптимизационные задачи и их решения должны быть согласованы. В-четвертых, в данной работе мы полностью описываем множества равновесных цен и объемов, в то время как в (Pilnik, Radionov, Tipunin, 2025) для множества равновесных цен были получены только максимальный и минимальный элементы.

Представленная в работе модель имеет некоторое сходство с классической моделью Эрроу–Дебре с производством (Debreu, 1959). Однако можно выделить ряд ключевых отличий рассматриваемой модели. Во-первых, в модели Эрроу–Дебре агенты действуют одновременно, в обобщенной модели – производитель знает решение оптимизационной задачи потребителя и принимает решение, основываясь на этой информации. В качестве аналогии можно привести модель олигополии по Штакельбергу (Stackelberg, 1934), в которой решения принимаются схожим образом. В результате использования такой архитектуры в модели могут возникнуть монопольные эффекты. Во-вторых, – наличие логистических издержек для каждой пары производитель – потребитель, что может приводить к ситуации, когда цены на один и тот же товар на разных рынках отличаются.

Для модели Эрроу–Дебре и ее аналогов основные теоретические результаты состоят в теоремах о существовании равновесия, численные алгоритмы поиска равновесий исследованы хуже. Ранние численные алгоритмы поиска равновесных цен в модели Эрроу–Дебре имели экспоненциальную сложность (см. обзор (Codenotti, Pemmaraju, Varadarajan, 2004)). В работах (Duan, Mehlhorn, 2015; Duan, Garg, Mehlhorn, 2016; Ghiyasvand, Orlin, 2012) для случая линейных функций полезности разработаны комбинаторные алгоритмы, вычисляющие равновесие за полиномиальное время. Предложен также ряд алгоритмов для нелинейных форм функции полезности (см., например, (Garg et al., 2015; Jin, Xia,

Zhou, 2018)). Также существуют работы, посвященные поиску аналитических решений модели в линейном случае (Eaves, 1975). В данной работе для обобщенной модели описан аналитический неитеративный алгоритм нахождения цен и объемов на рынке. Строгое исследование вычислительной сложности алгоритма является одним из направлений дальнейших исследований. Тем не менее имеются основания полагать, что он имеет полиномиальную сложность.

Как и базовая версия модели, предлагаемая в данной работе модель может быть полезна для прикладного исследования рынков, в частности для поиска фундаментально обоснованных или справедливых цен. При этом, как обсуждалось в (Pilnik, Radionov, Tirunin, 2025), задачу нахождения таких модельных цен не следует путать с задачей прогнозирования фактических рыночных цен, стандартными инструментами решения которой в настоящее время являются эконометрические модели, в том числе ARIMA (Box, Jenkins, 1976), ETS (Hyndman et al., 2008) или Prophet (Taylor, Letham, 2018), нейросетевые модели, такие как LSTM (Hochreiter, Schmidhuber, 1997) или Attention (Vaswani et al., 2017), а также модели машинного обучения, такие как случайный лес или градиентный бустинг (Zhou et al., 2019; Jabeur, Mefteh-Wali, Viviani, 2024).

Кроме того, модель может быть использована для исследования эффектов изменения параметров спроса и предложения (например, в результате роста экономики или инвестиций в производство), а также логистической структуры рынка (например, в результате санкций). Кроме того, данная обобщенная модель допускает наличие торговых пошлин и, как следствие, позволяет исследовать эффекты их изменения.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 описаны задачи агентов и условия равновесия в модели. В разд. 3 выведена система условий, определяющая множества равновесных объемов и цен. В разд. 4 представлен алгоритм разрешения этой системы, позволяющий определить точечные или интервальные значения для всех равновесных объемов и цен. В разд. 5 приведен пример модели с нетривиальным множеством равновесных цен.

2. Формулировка модели

2.1. Описание рынка

Рассмотрим географически распределенный рынок однородного товара, на котором действуют n производителей и m потребителей, причем каждый производитель может продать товар каждому потребителю. Далее для обозначения конкретного производителя будет использоваться индекс $i \in 1, \dots, n$, а для конкретного потребителя – индекс $j \in 1, \dots, m$. Обозначим объем поставок производителя i потребителю j как X_{ij}^s , суммарный объем поставок всех производителей потребителю j обозначим как X_j^d , где s и d – индексы, обозначающие предложение и спрос соответственно. Оптимальные с точки зрения задач планирования агентов объемы будут обозначаться X_{ij}^{s*} и X_j^{d*} соответственно.

Задача потребителя j состоит в максимизации целевой функции (функции полезности специального вида) за счет выбора суммарного по всем производителям объема товара, купленного данным потребителем. При этом предполага-

ется, что потребитель не может купить менее D_j^{min} (считается, что это некоторый минимальный уровень его потребления) или более D_j^{max} (можно считать это физическим ограничением процесса потребления).

Каждый производитель i может суммарно поставить всем потребителям объема товара, не превышающие его производственную мощность Y_i . Производство каждой единицы товара требует расходов, описываемых функцией издержек c_i . Аргументом данной функции является суммарный объем произведенных этим производителем товаров.

Для описания стоимости транспортировки (логистики) единицы товара между производителем i и потребителем j используется функция $l_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Аргументами этой функции являются все элементы вектора поставок рассматриваемого производителя i , представимого в виде $(X_{i1}, \dots, X_{im})^T$. Иными словами, изначально предполагается, что логистические издержки конкретного производителя зависят только от его переменных (причем допускаются перекрестные эффекты поставок по одному направлению на поставки по другому направлению), но не зависят от аналогичных переменных других производителей.

В модели предполагается, что взаимодействие потребителей и производителей происходит в точках расположения потребителей. Именно в этих точках происходит ценообразование в предположении, что на все товары, купленные потребителем j , устанавливается единая цена p_j . Такое предположение не является универсальным, но в случае рынков химической продукции, для которой изначально строилась эта модель, такое предположение вполне естественно.

Заметим, что хотя и до этого в описании рынка и далее при постановке задач агентов мы рассматриваем рынок одного товара, считая, что переменные X_j^s и X_j^d – это скалярные величины, несложно обобщить эту модель на случай нескольких товаров, считая эти величины векторами и правильно переопределив используемые функции.

2.2. Задача потребителя

Потребитель j решает задачу максимизации целевой функции вида

$$f_j(X_j^d) - p_j X_j^d \rightarrow \max \quad (1)$$

за счет выбора объема потребления X_j^d , удовлетворяющего ограничениям

$$D_j^{min} \leq X_j^d \leq D_j^{max}. \quad (2)$$

Функция f_j далее будет считаться вогнутой для всех значений аргументов, удовлетворяющих ограничению (2). Цену p_j потребитель считает экзогенной, поэтому решением его задачи является функция спроса $X_j^{d*}(p_j)$.

Следует обсудить несколько особенностей рассматриваемой задачи. Наиболее простой случай можно получить в предположении, что $D_j^{min} = D_j^{max}$ для всех j . В этом случае выбора у потребителя фактически нет, а его поведение сводится к потреблению изначально заданного объема товара. Этот случай аналогичен рассмотренному в работе (Pilnik, Radionov, Tirupin, 2025).

В более общем случае запись целевой функции в виде (1) может быть получена из стандартной задачи потребителя, в которой он максимизирует квазилинейную функцию полезности двух аргументов: описанного выше потребления

рассматриваемого товара X_j^d и измеренного в некоторых денежных величинах (например, в ценах базового года) потребления прочих товаров Z_j^d

$$U(X_j^d, Z_j^d) = f_j(X_j^d) + Z_j^d. \quad (3)$$

Предполагается, что потребитель j обладает некоторым фиксированным запасом денежных средств M_j , а его бюджетное ограничение имеет вид:

$$p_j X_j^d + Z_j^d = M_j. \quad (4)$$

Тогда, выразив Z_j^d из (4) и подставив его в (3), получим задачу максимизации по X_j^d следующей функции

$$f_j(X_j^d) - p_j X_j^d + M_j, \quad (5)$$

которая эквивалентна задаче (1).

Интересен также случай линейной функции $f_j(X_j^d)$, которую можно записать в виде

$$f_j(X_j^d) = q_j X_j^d. \quad (6)$$

Эту задачу можно трактовать уже не как задачу потребителя, а как задачу посредника, который покупает товар по цене p_j и продает его далее по цене q_j . Причем q_j с точки зрения спроса этого агента на рассматриваемом рынке можно интерпретировать как цену отсечения: если $p_j < q_j$, то агент покупает максимально возможный объем D_j^{max} , если $p_j > q_j$, то агент покупает минимальный (возможно, нулевой) объем D_j^{min} .

2.3. Задача производителя

Производитель в модели максимизирует прибыль, рассчитываемую как разность между выручкой от продажи товара и издержками на производство и логистику за счет выбора объемов продукта $X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s$, поставляемых на каждый из доступных рынков, т.е.

$$\sum_j \left[p_j - c_i \left(\sum_j X_{ij}^s \right) - l_{ij}(X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s) \right] X_{ij}^s \rightarrow \max_{X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s}. \quad (7)$$

Функция c_i считается выпуклой, а функция l_{ij} выпуклой по каждому аргументу. Как и в задачах потребителей, цены в такой постановке являются экзогенными переменными.

Допустимыми считаются только те наборы $X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s$, которые удовлетворяют следующим трем группам ограничений.

1. Вводятся ограничения на объемы поставок вида:

$$X_{ij}^{min} \leq X_{ij}^s \leq X_{ij}^{max}. \quad (8)$$

Ограничение объема поставок X_{ij}^s сверху значением X_{ij}^{max} можно интерпретировать как ограничение инфраструктуры или результат административного регулирования рынка. Так, например, через значения X_{ij}^{max} в модели могут быть учтены санкционные ограничения, запрещающие производителю i поставлять товар на рынок j : $X_{ij}^{max} = 0$. Ограничение объема поставок X_{ij}^s снизу значением X_{ij}^{min} может быть связано с некоторыми контрактными обязательствами, согласно которым производитель i обязан поставить на рынок j некоторый объем товара X_{ij}^{min} независимо от сложившихся на рынке цен. Такое ограничение может быть использовано, например, для описания аномальных значений цен, имевших место на рынке нефти в апреле 2020 г.

2. Предполагается, что суммарный объем производства производителя i ограничен его производственной мощностью Y_i , т.е.

$$\sum_j X_{ij}^s \leq Y_i. \quad (9)$$

3. Предполагается, что спрос потребителей является инерционным и хорошо прогнозируемым. Производители имеют возможность корректно оценить емкость каждого рынка и на основе этой информации принять решение. Следовательно, им известно решение задачи каждого конкретного потребителя j , записанное в виде $X_j^{d*}(p_j)$. Можно считать, что в рассматриваемой постановке производители аналогично модели Штакельберга делают ход первыми и поэтому могут рассчитать оптимальное поведение потребителей, описываемое функцией спроса. Безусловно, данная предпосылка ограничивает общность модели, однако она будет использована далее в процессе доказательства корректности алгоритма описания равновесных цен. С содержательной точки зрения такое ограничение позволяет охватить в модели эффекты монополизации отдельных рынков, когда производителю оказывается выгодно действовать так, чтобы забрать себе доли рынка своих конкурентов. С учетом того что часть объемов может поставляться на этот рынок из-за ограничений на минимальные значения X_{kj}^s других производителей, ограничение этого типа может быть записано как

$$X_{ij}^s \leq X_j^{d*}(p_j) - \sum_{k:k \neq i} X_{kj}^{min}. \quad (10)$$

2.4. Условия равновесия

Набор цен p_1, \dots, p_m в равновесии определяется так, чтобы решения задач потребителей и производителей удовлетворяли условиям равновесия на каждом рынке j :

$$X_j^{d*} = \sum_i X_{ij}^{s*}. \quad (11)$$

Для существования равновесия ставятся дополнительные необходимые условия на параметры модели. Предполагается, что ограничения логистики позволяют удовлетворить минимальный спрос для каждого потребителя

$$D_j^{min} \leq \sum_i X_{ij}^{max}, \quad (12)$$

а существующие контрактные обязательства не превышают максимального объема спроса

$$D_j^{max} \geq \sum_i X_{ij}^{min}. \quad (13)$$

Также предполагается, что имеющихся мощностей достаточно, хотя бы для того чтобы удовлетворить минимальные потребности потребителей, т.е.

$$\sum_j D_j^{min} \leq \sum_i Y_i. \quad (14)$$

3. Нахождение равновесия

3.1. Лагранжианы задач агентов

Для решения задач потребителей и производителей в силу их выпуклости (максимизация вогнутых функций) могут быть применены условия оптимальности в форме Лагранжа. А с учетом линейности всех ограничений

задачи может быть использован ослабленный критерий Слейтера и условия Каруша–Куна–Таккера.

Лагранжиан производителя i выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^p = & \sum_j \left[\left(p_j - c_i \sum_j X_{ij}^s - l_{ij} (X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s) \right) X_{ij}^s \right] + \xi_i \left(Y_i - \sum_j X_{ij}^s \right) + \\ & + \sum_j \left[\phi_{ij}^{\min} (X_{ij}^s - X_{ij}^{\min}) + \phi_{ij}^{\max} (X_{ij}^{\max} - X_{ij}^s) + \phi_{ij}^d \left(X_j^{d*} - \sum_{k:k \neq i} X_{kj}^{\min} - X_{ij}^s \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение задачи производителя удовлетворяет следующим условиям дополняющей нежесткости:

$$Y_i - \sum_j X_{ij}^{s*} \geq 0, \quad \xi_i (Y_i - \sum_j X_{ij}^{s*}) = 0, \quad \xi_i \geq 0, \quad (16)$$

$$X_{ij}^{s*} - X_{ij}^{\min} \geq 0, \quad (X_{ij}^{s*} - X_{ij}^{\min}) = 0, \quad \phi_{ij}^{\min} \geq 0, \quad (17)$$

$$X_{ij}^{d*} - X_{ij}^{s*} \geq 0, \quad \phi_{ij}^{\max} (X_{ij}^{\max} - X_{ij}^{s*}) = 0, \quad \phi_{ij}^{\max} \geq 0, \quad (18)$$

$$X_j^{d*} - X_j^{s*} - \sum_{k:k \neq i} X_{kj}^{\min} \geq 0, \quad \phi_{ij}^d (X_j^{d*} - X_j^{s*} - \sum_{k:k \neq i} X_{kj}^{\min}) = 0, \quad \phi_{ij}^d \geq 0. \quad (19)$$

Лагранжиан потребителя j имеет вид:

$$\mathcal{L}_j^c = f(X_j^d) - p_j X_j^d + \lambda_j^{\min} (X_j^d - D_j^{\min}) + \lambda_j^{\max} (D_j^{\max} - X_j^d). \quad (20)$$

Решение задачи потребителя должно удовлетворять следующим условиям дополняющей нежесткости:

$$X_j^{d*} - D_j^{\min} \geq 0, \quad \lambda_j^{\min} (X_j^{d*} - D_j^{\min}) = 0, \quad \lambda_j^{\min} \geq 0, \quad (21)$$

$$D_j^{\max} - X_j^{d*} \geq 0, \quad \lambda_j^{\max} (D_j^{\max} - X_j^{d*}) = 0, \quad \lambda_j^{\max} \geq 0. \quad (22)$$

Заметим, что максимизация n лагранжианов (15) и m лагранжианов (20) равносильна максимизации их суммы. Таким образом, решения исходных $m+n$ задач оптимизации могут быть получены максимизацией одной функции вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_i \left[\sum_j \left(p_j - c_i \left(\sum_j X_{ij}^s \right) - l_{ij} (X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s) \right) X_{ij}^s \right] + \xi_i \left(Y_i - \sum_j X_{ij}^s \right) + \\ & + \sum_j \left[\phi_{ij}^{\min} (X_{ij}^s - X_{ij}^{\min}) + \phi_{ij}^{\max} (X_{ij}^{\max} - X_{ij}^s) + \phi_{ij}^d \left(X_j^{d*} - \sum_{k \neq i} X_{kj}^{\min} - X_{ij}^s \right) \right] + \\ & + \sum_j \left[f_j(X_j^d) - p_j X_j^d + \lambda_j^{\min} (X_j^d - D_j^{\min}) + \lambda_j^{\max} (D_j^{\max} - X_j^d) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

с учетом условий (16)–(19) и (21)–(22). Если же к (23) и упомянутым условиям дополняющей нежесткости добавить условия равновесия (11) и правило передачи информации о выборе потребителя X_j^{d*} производителю, то условия, получаемые вариацией функции (23) по прямым переменным, и добавленные к ним условия равновесия и передачи информации дадут ровно то же описание равновесия, что и в исходной модели.

Так как X_j^{d*} и $\sum_{k:k \neq i} X_{kj}^{\min}$ не являются управляемыми переменными, то на итоговое решение задачи максимизации они не влияют, поэтому их можно опустить. Кроме того, к выражению в правой части (23) можно добавить слагаемое $\sum \phi_{ij}^d X_{ij}^{\max}$, которое не влияет на точку оптимума. Далее введем замену

$$\tilde{\phi}_{ij}^{\max} = \phi_{ij}^{\max} + \phi_{ij}^d. \quad (24)$$

После вышеописанных преобразований задача максимизации (23) переписывается как задача максимизации функции

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_i \left[\sum_j \left(p_j - c_i \left(\sum_j X_{ij}^s \right) - l_{ij} \left(X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s \right) \right) X_{ij}^s \right] + \xi_i \left(Y_i - \sum_j X_{ij}^s \right) + \\ & + \sum_j \left[\phi_{ij}^{\min} \left(X_{ij}^s - X_{ij}^{\min} \right) + \phi_{ij}^{\max} \left(X_{ij}^{\max} - X_{ij}^s \right) \right] + \\ & + \sum_j \left[f_j \left(X_j^d \right) - p_j X_j^d + \lambda_j^{\min} \left(X_j^d - D_j^{\min} \right) + \lambda_j^{\max} \left(D_j^{\max} - X_j^d \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Лагранжиан (15) можно упрощенно представить в виде

$$\mathcal{L}_i^p = \sum_j p_j X_{ij}^s - g \left(X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s \right),$$

а лагранжиан (20) – $\mathcal{L}_j = h \left(X_j^d \right) - p_j X_j^d$. Пусть

$$\left(X_{i1}^{s*} \left(p_j \right), \dots, X_{im}^{s*} \left(p_j \right) \right) = \operatorname{argmax} \mathcal{L}_i^p, \quad (26)$$

$$X_j^{d*} = \operatorname{argmax} \mathcal{L}_j. \quad (27)$$

Пусть p_j^* таково, что $X_j^{d*} \left(p_j^* \right) = \sum_i X_{ij}^{s*} \left(p_j^* \right)$. Обозначим $X_{ij}^{s**} = X_{ij}^{s*} \left(p_j^* \right)$.

Условия первого порядка для максимизации лагранжианов (15) и (20) можно записать в виде:

$$p_j - \frac{\partial g}{\partial X_{ij}^s} \left(X_{i1}^{s*} \left(p_j \right), \dots, X_{im}^{s*} \left(p_j \right) \right) = 0, \quad (28)$$

$$h' \left(X_j^{d*} \right) - p_j = 0. \quad (29)$$

Следовательно,

$$h' \left(X_j^{d*} \right) - \frac{\partial g}{\partial X_{ij}^s} \left(X_{i1}^{s*} \left(p_j \right), \dots, X_{im}^{s*} \left(p_j \right) \right) = 0. \quad (30)$$

При $p_j = p_j^*$ имеем

$$h' \left(\sum_i X_{ij}^{s**} \right) - \frac{\partial g}{\partial X_{ij}^s} \left(X_{i1}^{s**}, \dots, X_{im}^{s**} \right) = 0. \quad (31)$$

Теперь рассмотрим задачу вида

$$\sum_i \sum_j \left[h \left(\sum_i X_{ij}^s \right) - g \left(X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s \right) \right] \rightarrow \max_{X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s}. \quad (32)$$

Условия первого порядка для такой задачи будут выглядеть следующим образом:

$$h' \sum_i X_{ij}^s - \frac{\partial g}{\partial X_{ij}^s} \left(X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s \right) = 0. \quad (33)$$

Условия (31) и (33) эквивалентны. Следовательно, задача (25) эквивалентна более простой задаче, не содержащей цен явно. Разворачивая постановку (32), получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_i \left[\sum_j \left(-c_i \left(\sum_j X_{ij}^s \right) + l_{ij} \left(X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s \right) \right) X_{ij}^s \right] + \xi_i \left(Y_i - \sum_j X_{ij}^s \right) + \\ & + \sum_j \left[\phi_{ij}^{\min} \left(X_{ij}^s - X_{ij}^{\min} \right) + \phi_{ij}^{\max} \left(X_{ij}^{\max} - X_{ij}^s \right) \right] + \\ & + \sum_j \left[f_j \left(\sum_i \left(X_j^d \right) \right) + \lambda_j^{\min} \left(X_j^s - D_j^{\min} \right) + \lambda_j^{\max} \left(D_j^{\max} - X_j^s \right) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

причем управлениями в данном случае являются только переменные X_{ij}^s . Это выражение можно трактовать как лагранжиан задачи планирования, которая может быть записана в следующем виде. Максимизируется целевой функционал

$$\sum_i \sum_j \left[f_i \left(\sum_i X_{ij}^s \right) - c_i \left(\sum_j X_{ij}^s \right) - l_{ij} \left(X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s \right) \right] X_{ij}^s \rightarrow \max_{X^s} \quad (35)$$

при ограничениях (8), (9) и эквивалентной форме ограничения (2):

$$D_j^{min} \leq \sum_i X_{ij}^s \leq D_j^{max}. \quad (36)$$

Таким образом, в работе явно продемонстрировано, что на рынках с инерционным и хорошо прогнозируемым спросом конкурентное равновесие между фирмами оказывается эквивалентно решению задачи планировщика, максимизирующего суммарный выигрыш экономики. Описанная задача планирования представляет собой задачу максимизации вогнутой целевой функции при линейных ограничениях. Ее решение может быть найдено как аналитически (за счет перебора разных комбинаций реализации условий дополняющей нежесткости), так и численно. Частный случай этой задачи решается на первом этапе алгоритма поиска рыночных цен, описанного в (Pilnik, Radionov, Tirupin, 2025).

А так как задача планирования не содержит цен, то поиск равновесия в исходной модели рынка может быть разделен на два этапа: сначала могут быть найдены объемы всех производителей по всем направлениям поставок, после чего из условий оптимальности задач агентов можно найти цены.

3.2. Решение задачи потребителя

Рассмотрим условия оптимальности задачи потребителя в предположении, что объемы потребления уже известны и найдены на предыдущем шаге из задачи планирования. Равенство нулю первой производной лагранжиана (20) в силу вогнутости задачи является одновременно необходимым и достаточным условием максимума и может быть записано как

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial X_j^d} = f_j'(X_j^d) - p_j + \lambda_j^{min} - \lambda_j^{max} = 0. \quad (37)$$

Ограничения (2) по построению порождают непустое множество и являются линейными, что позволяет считать ослабленный критерий Слейтера выполненным. Исходя из вогнутости целевой функции и выполнения критерия Слейтера, можно считать условия Куна–Таккера необходимыми и достаточными. С учетом условий дополняющей нежесткости задачи потребителя (21)–(22) можем перечислить все возможные комбинации нулевых значений двойственных переменных, описывающих отдельные режимы:

$$\begin{cases} \lambda_j^{min} = 0, \lambda_j^{max} = 0, p_j = f_j'(X_j^{d*}), & \text{если } D_j^{min} \leq X_j^{d*} \leq D_j^{max}; \\ \lambda_j^{min} \geq 0, \lambda_j^{max} = 0, p_j \geq f_j'(X_j^{d*}), & \text{если } X_j^{d*} = D_j^{min}; \\ \lambda_j^{min} = 0, \lambda_j^{max} \geq 0, p_j \leq f_j'(X_j^{d*}), & \text{если } X_j^{d*} = D_j^{max}. \end{cases} \quad (38)$$

Видно, что для внутреннего решения задачи потребителя (первый режим из трех) цены определяются явно в зависимости от равновесных объемов спроса X_j^{d*} . Для граничных решений (второй и третий режимы) возможно выписать только ограничения-неравенства.

3.3. Решение задачи производителя

Условия оптимальности для задачи производителя:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial X_{ij}^s} = p_j - c_i \left(\sum_j X_{ij}^s \right) - X_{ij}^s c_i' \left(\sum_j X_{ij}^s \right) - l_{ij} (X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s) - \frac{\partial l_{ij}}{\partial X_{ij}^s} (X_{i1}^s, \dots, X_{im}^s) - \xi_i + \phi_{ij}^{\min} - \phi_{ij}^{\max} - \phi_{ij}^d = 0. \quad (39)$$

Рассмотрим ограничения (18) и (19), записанные в виде:

$$X_{ij}^{s*} \leq X_{ij}^{\max}, \quad (40)$$

$$X_{ij}^{s*} \leq X_j^{d*}(p_j) - \sum_{k:k \neq i} X_{kj}^{\min}. \quad (41)$$

Заметим, что в случае равенства правых частей этих неравенств эти ограничения становятся идентичными и одно из них можно опустить, а значения двойственных переменных ϕ_{ij}^{\max} и ϕ_{ij}^d определятся только в сумме. Во всех остальных случаях по крайней мере одна из двойственных переменных ϕ_{ij}^{\max} и ϕ_{ij}^d должна равняться нулю. Используя этот факт, введем уже использованную ранее замену (24), а также обозначение

$$\tilde{X}_{ij}^{\phi_{ij}^{\max}} = \min \left\{ X_{ij}^{\max}, X_j^{d*}(p_j) - \sum_{k:k \neq i} X_{kj}^{\min} \right\}. \quad (42)$$

Также для удобства введем обозначения для выражений от издержек производства и транспортировки, которые включают в себя только объемы, которые были получены ранее из задачи планирования:

$$\tilde{c}_i = c_i \left(\sum_j X_{ij}^{s*} \right) + X_{ij}^{s*} c_i' \left(\sum_{k:k \neq i} X_{ij}^{s*} \right); \quad (43)$$

$$\tilde{l}_{ij} = l_{ij} (X_{i1}^{s*}, \dots, X_{im}^{s*}) + \frac{\partial l_{ij}}{\partial X_{ij}^{s*}} (X_{i1}^{s*}, \dots, X_{im}^{s*}).$$

Тогда уравнение (16) можно записать в форме:

$$p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} - \xi_i + \phi_{ij}^{\min} - \tilde{\phi}_{ij}^{\max} = 0. \quad (44)$$

Выражение $p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ представляет собой разницу цены и суммарных издержек на единицу продукции, т.е. маржу производителя.

Для существования решения задачи потребуем выполнения ряда дополнительных условий. Исходя из (8),

$$X_{ij}^{\min} \leq X_{ij}^{\max}, \quad (45)$$

а из (9) и (8) можно сделать вывод, что

$$X_{ij}^{\min} \leq Y_i. \quad (46)$$

Наконец, основываясь на (10), можно заключить, что

$$X_{ij}^s \leq X_j^{d*}(p_j). \quad (47)$$

Таким образом, так как все ограничения линейны, ослабленный критерий Слейтера выполнен. Учитывая выпуклость целевого функционала, условия Куна–Таккера для нахождения решения этой задачи можно считать необходимыми и достаточными.

При $X_{ij}^{\min} < \tilde{X}_{ij}^{\max}$, как минимум, одно из следующих утверждений должно выполняться: $\phi_{ij}^{\min} = 0$ или $\tilde{\phi}_{ij}^{\max} = 0$. Используя этот вывод и введенные обозначения, система условий на двойственные переменные выглядит так:

$$\left[\begin{array}{ll} \sum_j X_{ij}^{s*} = Y_i & \Rightarrow \xi_i \geq 0; \\ \sum_j X_{ij}^{s*} < Y_i & \Rightarrow \xi_i = 0; \\ X_{ij}^{min} < X_{ij}^{s*} < \tilde{X}_{ij}^{max} & \Rightarrow \phi_{ij}^{min} = 0, \tilde{\phi}_{ij}^{max} = 0; \\ X_{ij}^{min} = X_{ij}^{s*} & \Rightarrow \phi_{ij}^{min} > 0, \tilde{\phi}_{ij}^{max} = 0; \\ X_{ij}^{s*} = \tilde{X}_{ij}^{max} & \Rightarrow \phi_{ij}^{min} = 0, \tilde{\phi}_{ij}^{max} > 0. \end{array} \right. \quad (48)$$

3.4. Описание поведения производителя

Поведение производителя в рассматриваемой модели существенно сложнее поведения потребителя. Его главная специфика – выбор рынков, на которые он планирует поставлять свой товар, конкурируя при этом с другими производителями за спрос. Из решения задачи производителя может быть получено несколько соотношений, описывающих базовые принципы его поведения и при этом имеющих содержательную экономическую интерпретацию.

Рассмотрим рынок j , для которого производитель i в равновесии (и в решении задачи планирования) поставляет объем $X_{ij}^{s*} > X_{ij}^{min}$. Тогда в силу условий дополняющей нежесткости (16)–(19) можем записать

$$\phi_{ij}^{min} = 0, \quad (49)$$

а уравнение (44) приобретет вид

$$p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} = \xi_i + \tilde{\phi}_{ij}^{max} \geq 0. \quad (50)$$

То есть если производитель i поставляет в равновесии товар на рынок j , то на этом рынке его маржа должна быть неотрицательна. Это так называемое условие участия, которое в точности повторяет соотношение (4) из работы (Pilnik, Radionov, Tirunin, 2025). Отметим, что в упомянутой работе оно постулируется как принцип поведения производителя. В настоящей же работе мы получаем его как решение оптимизационной задачи при выполненных условиях равновесия.

Теперь предположим ситуацию, при которой в равновесии поставляется объем, удовлетворяющий условиям $X_{ij}^{s*} < \tilde{X}_{ij}^{max}$ и $\sum_j X_{ij}^{s*} < Y_i$. Тогда

$$\xi_i = 0, \quad \tilde{\phi}_{ij}^{max} = 0, \quad (51)$$

а уравнение (44) приобретет вид

$$p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} = -\phi_{ij}^{min} \leq 0. \quad (52)$$

В рассматриваемой ситуации производитель i может увеличить свои поставки на рынок j , не сокращая поставок на остальные рынки, поскольку и имеет свободные мощности, и не выбрал собственной максимальной квоты на рынке j . С точки зрения оптимального поведения производителя такое решение он может принять, только если его маржа на этом рынке неположительна.

Полученное неравенство (52) в точности повторяет соотношение (21) из работы (Pilnik, Radionov, Tirunin, 2025). При этом в отличие от (Pilnik, Radionov, Tirunin, 2025), где условия (50) и (52) используются в разных постановках, в данной модели они получаются одновременно, и далее мы рассмотрим, как они соотносятся между собой.

Теперь рассмотрим выбор производителя i между двумя рынками j и k . Для рынка j выразим ξ_i из уравнения (44):

$$\xi_i = p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} + \phi_{ij}^{\min} - \tilde{\phi}_{ij}^{\max}. \quad (53)$$

Для рынка k можно выписать аналогичное соотношение и приравнять правые части между собой:

$$p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} + \phi_{ij}^{\min} - \tilde{\phi}_{ij}^{\max} = p_k - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ik} + \phi_{ik}^{\min} - \tilde{\phi}_{ik}^{\max}. \quad (54)$$

После перегруппировки слагаемых получим

$$p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} = p_k - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ik} + \phi_{ik}^{\min} + \tilde{\phi}_{ij}^{\max} - (\phi_{ij}^{\min} + \tilde{\phi}_{ik}^{\max}). \quad (55)$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда производитель везет больше минимально требуемого объема на рынок k , т.е. $X_{ik}^{s^*} > X_{ik}^{\min}$, а на рынке j у него есть возможность для увеличения объема поставок, т.е. $X_{ij}^{s^*} < X_{ij}^{\max}$. Тогда одновременно выполняются условия:

$$\phi_{ik}^{\min} + \tilde{\phi}_{ij}^{\max} = 0, \quad \phi_{ij}^{\min} + \tilde{\phi}_{ik}^{\max} \geq 0. \quad (56)$$

Следовательно, (55) может быть записано в виде

$$p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} \leq p_k - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ik}. \quad (57)$$

Таким образом, чтобы производитель, имеющий возможность перенаправить часть своего продукта с одного рынка на другой (в нашем случае с рынка k на рынок j), маржа на рынке, куда он поставляет сверх минимального ограничения (рынок k), должна быть не меньше, чем маржа на рынке, где есть возможность для увеличения объемов поставок. Полученное соотношение в точности повторяет неравенство (5) из работы (Pilnik, Radionov, Tipunin, 2025). Как мы увидим в дальнейшем, именно три рассмотренных неравенства (50), (52) и (57) будут определять геометрию множества равновесных цен в модели. Эти условия хотя и являются условиями оптимальности для производителей, в равновесии становятся условиями на цены, тем более что равновесные объемы известны из задачи планирования, решаемой на первом этапе.

4. Алгоритм определения цен

Равновесное состояние каждого рынка, определяющее сложившуюся на нем цену, в модели описывается одним условием вида (37) и набором из n условий вида (44), записанных для каждого производителя независимо от того, поставляет ли конкретный производитель на этот рынок или нет. Заметим, что условие (37) содержит только переменные, связанные с этим рынком (и его потребителем), а условия (44) содержат переменные ξ_i , характеризующие только производителя i , но не привязанные ни к одному из рынков. Именно эти переменные и будут связывать описания равновесных состояний разных рынков между собой. Из-за этого итоговая система оказывается достаточно сложной, поскольку одновременно включает и равенства типа (37) и (44), и наборы условий, содержащие неравенства вида (38) и (48). Однако эту систему можно частично разрешить и упростить. Для этого рассмотрим подробнее варианты состояния рынков в зависимости от структуры описывающих их равновесное состояние условий.

Во-первых, очевидно, что на каждом рынке в равновесии может достигаться как внутреннее, так и граничное решение задачи потребителя. Причем граничное решение может быть связано с достижением верхней или нижней

границы спроса, задаваемой (2). В соответствии с (38), за выбор одного из трех описанных режимов отвечают двойственные переменные λ_j^{min} и λ_j^{max} .

Во-вторых, оказывается важным, поставляет ли на этот рынок хоть один производитель, выпуск которого оказывается строго меньше его производственных мощностей. Для такого производителя окажется нулевой двойственная переменная ξ_i согласно (48), а следовательно, из условия (44) исчезнет переменная, связывающая его с другими рынками, оставив только переменные рассматриваемого рынка и издержки производителя, которые в силу уже найденных оптимальных объемов выпуска фиксированы. Таким образом будет получено еще одно условие, описывающее состояние конкретного рынка, независимо от состояния всех остальных.

В-третьих, отдельно следует описывать рынки, на которые поставляет свой товар только один производитель, образующий монополию на конкретном рынке. За наличие или отсутствие монополии на рынке отвечает двойственная переменная ϕ_{ij}^d , влияющая согласно (24) на переменную $\tilde{\phi}_{ij}^{max}$.

Для удобства далее каждый тип рынка мы будем обозначать трехзначным кодом (i, j, k) . Первый элемент принимает значения 1, 2 и 3, если на рынке реализовался соответственно внутренний, минимальный или максимальный спрос. Второй элемент записывается как 1 при наличии производителя со свободными мощностями и внутренними объемами на рынке и 2 – в противном случае. Под внутренними объемами здесь и далее мы будем понимать ситуацию $X_{ij}^{min} < X_{ij}^{s*} < \tilde{X}_{ij}^{max}$.

Третий элемент кода будет принимать значение 1 при отсутствии монополии на рынке и 2 – при ее наличии. Например, кодом (1, 2, 1) будем обозначать рынок без монополии и производителей со свободными мощностями, т.е. больше минимальных ограничений продает более чем один продавец, среди которых отсутствуют производители, суммарный выпуск которых меньше их производственных мощностей, на котором достигнут внутренний спрос. Если мы захотим обозначить множество всех рынков конкретного типа, будем заменять остальные переменные символом x . Например, кодом (1, x , x) обозначим все рынки, на которых достигнут внутренний спрос.

Далее мы опишем конечную процедуру, которая дает полное описание множества равновесных цен в рассматриваемой модели.

Шаг 1. Рынки с внутренним спросом. На первом шаге удобнее всего рассмотреть рынки с внутренним спросом (1, x , x). Их особенностью является тот факт, что на этих рынках однозначно определяются цены $p_j = f'(X_j^d)$ согласно первому условию (38). Если на таком рынке продает производитель со свободными мощностями, то согласно второму условию из (48) определится $\xi_i = 0$.

Если производитель достиг внутреннего объема на рынке, то согласно (48) будут найдены его двойственные переменные $\phi_{ij}^{min} = 0$ и $\tilde{\phi}_{ij}^{max} = 0$. Подставляя найденные цены и двойственные переменные в (44), однозначно определится $\xi_i = f'(X_j^d) - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$.

Для случая монополии справедливо пятое уравнение из (48). В этом случае $\xi_i \geq f'(X_j^d) - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$, так как $\tilde{\phi}_{ij}^{max} > 0$.

Для части остальных производителей также на основе (44) и первого условия (38) окажется возможным выписать неравенства для значений двойственной переменной ξ_i в зависимости от величины $f'(X_j^d) - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$.

Таким образом, на этом шаге будут записаны следующие соотношения.

1. Определяются цены $p_j = f'(X_j^d)$ для всех рынков (1, x, x).
2. Определяются $\xi_i = f'(X_j^d) - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей с внутренним предложением на рынках (1, 1, 1), (1, 1, 2) и (1, 2, 1).
3. Записываются неравенства $\xi_i \geq f'(X_j^d) - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей, являющихся монополистами на рынках (1, 2, 2).
4. Записываются неравенства $\xi_i \geq f'(X_j^d) - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей с минимально допустимым предложением на рынках (1, x, x).
5. Записываются неравенства $\xi_i \leq f'(X_j^d) - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей с максимально допустимым предложением на рынках (1, x, 1).

Заметим, что наиболее типичным сценарием является случай неограниченного спроса $D_{min} = 0$, $D_{max} = \infty$. В качестве функции полезности f можно использовать, например, экспоненциальную полезность при $\alpha > 0$: $f_j(x) = (1 - e^{-\alpha x}) / \alpha$. В этом случае в силу вогнутости задач все рынки окажутся рынками с внутренним спросом. Тогда множество цен на каждом рынке будет являться одноточечным множеством в силу пункта 1 описанного выше алгоритма.

Шаг 2. Рынки с производителем со свободными мощностями.

Рассмотрим рынки, на которых достигнут максимальный или минимальный спрос. На этих рынках должна отсутствовать монополия и присутствовать производитель со свободными мощностями. Благодаря наличию такого производителя на рассматриваемых рынках также однозначно получаем цены.

Как и на предыдущем шаге, для производителей со свободными мощностями определится двойственная переменная $\xi_i = 0$ согласно (48). Если при этом производитель имеет внутренний объем на данных рынках, то, исходя из (48), будет также справедливо $\phi_{ij}^{min} = 0$, $\phi_{ij}^{max} = 0$. Тогда цены на указанных рынках можно будет найти из условия (44): $p_j = \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$.

Рассматриваемые производители на этих рынках будут торговать в ноль, закрывая потребность рынка в товаре, но не имея стимулов нарастить поставки на эти рынки в силу нулевой маржинальности.

Как и на предыдущем шаге, для части остальных производителей на основе (44) окажется возможным выписать неравенства на значения двойственной переменной ξ_i в зависимости от величины $p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$.

Таким образом, на этом шаге будут записаны следующие соотношения.

1. Определяются $\xi_i = 0$ для производителей со свободными мощностями и внутренними объемами на рынках (2, 1, 1) и (3, 1, 1).
2. Определяются цены на рынках с граничным спросом (2, 1, 1) и (3, 1, 1). Для этих рынков справедливо $p_j = \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$ относительно производителя из пункта 1.
3. Определяются $\xi_i = p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей без свободных мощностей и с внутренними объемами на (2, 1, 1) и (3, 1, 1).
4. Записываются неравенства $\xi_i \geq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей с минимально допустимыми объемами на рынках (2, 1, 1).
5. Записываются неравенства $\xi_i \leq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей с максимально допустимыми объемами на рынках (3, 1, 1).

Шаг 3. Оставшиеся рынки с однозначно определяемыми ценами.

Нерассмотренными осталась часть рынков с минимальным и максимальным спросами. Среди них монопольные рынки, на которых присутствует производи-

тель со свободными мощностями (2, 1, 2) и (3, 1, 2). Также необходимо рассмотреть рынки без производителя со свободными мощностями (2, 2, 1), (2, 2, 2), (3, 2, 1), (3, 2, 2).

Начнем с рынков (2, 1, 2) и (3, 1, 2). Ранее мы выяснили, что для производителя со свободными мощностями будет справедливо $\xi_i = 0$ согласно (44).

Теперь рассмотрим рынки без монополии и без производителя со свободными мощностями, т.е. (2, 2, 1) и (3, 2, 1). Если на таком рынке присутствует хотя бы один производитель с внутренним объемом, для которого известна ξ_i , то цена будет найдена однозначно. Согласно (44) для этого производителя определяются $\phi_{ij}^{min} = 0$ и $\tilde{\phi}_{ij}^{max} = 0$. Следовательно, цена на рынке вычисляется по формуле: $p_j = \xi_i + \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$.

Если после этих рассуждений удалось получить цену хотя бы на одном новом рынке, то следует проверить, присутствуют ли на этом рынке другие производители с внутренним предложением, у которых при уже известной цене из того же соотношения (44) определятся их двойственные переменные ξ_i . Если такие производители характеризуются внутренним спросом на еще не рассмотренных рынках (2, 2, 1) и (3, 2, 1), то на них тоже будут получены цены. Этот набор действий может повторяться несколько раз, пока все такие производители не будут учтены.

Таким образом, на этом шаге будут записаны следующие соотношения.

1. Определяются $\xi_i = 0$ для производителей с внутренним предложением на (2, 1, 2) и (3, 1, 2).

2. Используются производители с известными ξ_i и внутренним предложением на рынках (2, 2, 1) и (3, 2, 1) для определения цен $p_j = \xi_i + \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$.

3. Определяются ξ_i для производителей с внутренним предложением на (x, 2, 1).

4. Повторить шаги 2 и 3 по цепочке для всех доступных производителей.

5. Записываются неравенства $\xi_i \geq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей с минимально допустимым предложением на рынке (x, 2, 1).

6. Записываются неравенства $\xi_i \leq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$ для производителей с максимально допустимым предложением на рынке (x, 2, 1).

Заметим, что после шага 3 могут быть рассмотрены не все рынки (2, 2, 1) и (3, 2, 1). Также можно утверждать (это будет видно далее при описании шага 4), что к этому моменту рассмотрены все рынки, на которых однозначно определяются цены p_j .

Шаг 4. Неравенства на оставшиеся цены. Осталось найти цены на рынках (2, 2, 1) и (3, 2, 1), а также на всех рынках с граничным спросом и монополией: (2, 1, 2), (2, 2, 2), (3, 1, 2), (3, 2, 2). При этом у части производителей не определены ξ_i .

Выпишем все неравенства на оставшиеся неопределенными цены. Для этого используются соотношения (37) и (44). Первое связывает цены с функцией $f^t(X_j^d)$ из задачи потребителя на этом рынке (причем знак неравенства будет отличаться для случая минимального и максимального спроса), а второе – с издержками производителей и значениями их двойственных переменных ξ_i (причем для всех, а не только для тех, которые поставляют внутренние объемы).

Теперь можно записать ряд ограничений.

1. Для рынков (2, 2, 1) и (3, 2, 1):

(♦) на цены $-p_j \leq f'(X_j^d)$ для рынков (2, 2, 1), $p_j \geq f'(X_j^d)$ для рынков (3, 2, 1);

(♦) производители с известной ξ_i и $X_{ij}^{min} = X_{ij}^* - p_j \leq \xi_i + \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$;

(♦) производители с известной ξ_i и $X_{ij}^{max} = X_{ij}^* - p_j \geq \xi_i + \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$;

(▲) производители с неизвестной ξ_i и $X_{ij}^{min} < X_{ij}^* < X_{ij}^{max} - \xi_i = p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$;

(▲) производители с неизвестной ξ_i и $X_{ij}^{min} = X_{ij}^* - \xi_i \geq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$;

(▲) производители с неизвестной ξ_i и $X_{ij}^{max} = X_{ij}^* - \xi_i \leq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$.

2. Для рынков (2, 1, 2) и (3, 1, 2):

(♦) на цены $-p_j \leq f'(X_j^d)$ или $p_j \geq f'(X_j^d)$;

(♦) производители, не являющиеся монополистами, с известной ξ_i и $X_{ij}^{min} = X_{ij}^* - p_j \leq \xi_i + \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$;

(♦) монополисты $-p_j \geq \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$,

(▲) производители с неизвестной ξ_i и $X_{ij}^{min} = X_{ij}^* - \xi_i \geq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$.

3. Для рынков (2, 2, 2) и (3, 2, 2):

(♦) на цены (для рынков с минимальным или максимальным спросом) $-p_j \leq f'(X_j^d)$ или $p_j \geq f'(X_j^d)$,

(♦) производители, не являющиеся монополистами, с известной ξ_i и $X_{ij}^{min} = X_{ij}^* - p_j \leq \xi_i + \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij}$,

(▲) монополисты $-\xi_i \leq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$,

(▲) производители с неизвестной ξ_i и $X_{ij}^{min} = X_{ij}^* - \xi_i \geq p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$.

Заметим, что все перечисленные соотношения можно разделить на две категории: индивидуальные ограничения на p_j вида $p_j^{min} \leq p_j \leq p_j^{max}$ (отмечены значком «♦»), индивидуальные ограничения на ξ_i вида $\xi_i^{min} \leq \xi_i \leq \xi_i^{max}$ (отмечены «▲»). Эти соотношения фиксируют границы, в которых могут изменяться цены p_j и двойственные переменные ξ_i независимо друг от друга. Также можно выделить ряд соотношений, связывающих p_j и ξ_i между собой. Рассмотрим оставшиеся рынки (x, 2, 1). Среди них можно выделить те, на которых существует хотя бы один производитель с внутренними объемами. Для таких производителей будет выполняться $\xi_i = p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij}$.

Возможны 3 варианта:

- на разных рынках это разные производители, а следовательно, число независимых p_j не меняется, и при этом добавляется ограничение: $\xi_i = p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} \geq 0$;

- на двух или более рынках это один и тот же производитель, следовательно, между такими рынками устанавливается связь: $p_j - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ij} = p_k - \tilde{c}_i - \tilde{l}_{ik} \geq 0$;

- на одном рынке таких производителей несколько, следовательно, между такими производителями устанавливается связь: $\xi_i + \tilde{c}_i + \tilde{l}_{ij} = \xi_m + \tilde{c}_m + \tilde{l}_{mj}$.

Для остальных цен находятся интервалы, границы которых выражаются через издержки и определенные ранее однозначно цены других рынков.

5. Пример геометрии множества цен

Прежде всего отметим, что если задача (34) имеет решение, то множество равновесных цен непусто. Это связано с тем, что задача (34) эквивалентна задаче (23), следовательно, существуют двойственные переменные последней, удовлетворяющие условиям (16)–(19) и (21)–(22). В свою очередь, как мы видели выше,

именно через эти двойственные переменные выражаются искомые цены, которые, следовательно, существуют.

Множество равновесных цен рассматриваемой задачи описывается тремя типами ограничений. Как мы видели выше, часть цен может определиться единственным образом. При этом это могут быть все цены (когда на всех рынках устанавливается равновесие с внутренним спросом) или может сложиться ситуация, когда определяемых единственным образом цен в равновесии нет. Пример такой задачи представлен в (Pilnik, Radionov, Tirunin, 2025, рис. 1А).

Второй тип ограничений на цены – неравенства, ограничивающие снизу и сверху цены на конкретном рынке в зависимости от издержек фирм, связанных с этим рынком (причем это могут быть как фирмы, продающие некоторый объем продукта, так и фирмы, вообще не продающие продукт на этом рынке) или уже определившихся ранее однозначно цен других рынков. Второй тип ограничений на цены с геометрической точки зрения представляет собой гиперплоскость, либо параллельную, либо перпендикулярную каждой оси координат.

Третий тип ограничений связывает цены на разных рынках через условия вида (57), представляющие собой неравенства на маржинальность двух рынков. Третий тип ограничений задает гиперплоскость, которая в проекции на координатную плоскость, задаваемую двумя ценами, которые используются в рассматриваемом неравенстве, дает прямую с углом наклона в 45 градусов.

Далее мы приведем простой пример, объединяющий три вышеперечисленных типа ограничений.

Пусть рынок некоторого товара представлен тремя производителями (X, Y, Z) и тремя потребителями (A, B, C). Производственная мощность каждого производителя равняется 12, а спрос каждого потребителя равняется 10 независимо от цен, производственные издержки равны нулю. Также задано ограничение на максимальный объем поставок производителя X на рынок B : $X_{XB} \leq 8$. Матрица логистических издержек равна

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

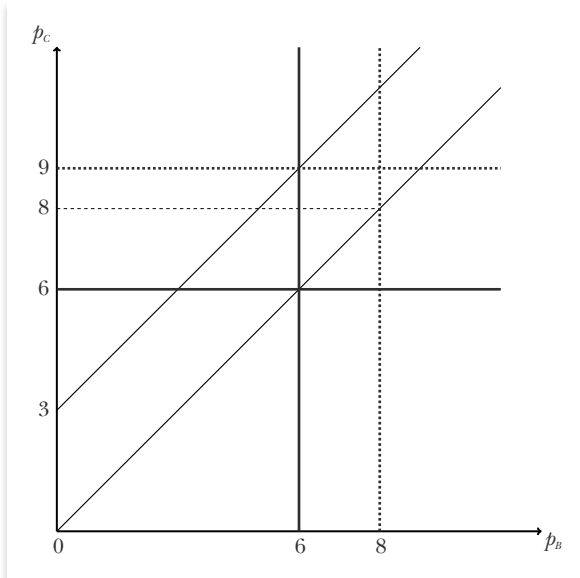
Тогда матрица распределения объемов равна

$$X^{s*} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На рынке A присутствует производитель со свободными мощностями. Следовательно, цена на рынке будет равняться издержкам этого производителя: $P_A = 6$.

Ограничения типа (57) для производителя X принимают вид:

$$\begin{aligned} p_B - 4 &\geq p_A - 4 & p_B &\geq 6, \\ p_B - 4 &\geq p_C - 7 & \Rightarrow p_C &\leq p_B + 3, \\ p_A - 4 &\geq p_C - 7 & p_C &\leq 9, - \end{aligned}$$

**Рисунок.**

Проекция множества равновесных цен на плоскость p_B, p_C

связаны с построением и исследованием динамических версий представленной модели, допускающих формирование товарных запасов, а также с описанием поведения групп не конкурирующих между собой производителей (холдингов).

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

- Box G.E.P., Jenkins G.M.** (1976). *Time series analysis. Forecasting and control*. Holden Day Series in Time Series Analysis. Revised Edition. San Francisco: Holden Day.
- Christiano L.J., Eichenbaum M., Evans C.L.** (2005). Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy. *Journal of Political Economy*, 113, 1, 1–45.
- Codenotti B., Pemmaraju S., Varadarajan K.** (2004). The computation of market equilibria. *Acta Sigact News*, 35, 4, 23–37.
- Debreu G.** (1959). *Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*. Vol. 17. New Haven (CT): Yale University Press.
- Duan R., Garg J., Mehlhorn K.** (2016). An improved combinatorial polynomial algorithm for the linear Arrow-Debreu market. *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms*. SIAM, 90–106.
- Duan R., Mehlhorn K.** (2015). A combinatorial polynomial algorithm for the linear Arrow-Debreu market. *Information and Computation*, 243, 112–132.
- Eaves B.C.** (1976). A finite algorithm for the linear exchange model. *Journal of Mathematical Economics*, 3 (2), 197–203.
- Garg J., Mehta R., Sohoni M., Vazirani V.V.** (2015). A complementary pivot algorithm for market equilibrium under separable, piecewise-linear concave utilities. *SIAM J. Comput.*, 44, 1820–1847.
- Ghiyasvand M., Orlin J.B.** (2012). A simple approximation algorithm for computing Arrow-Debreu prices. *Operations Research*, 60, 5, 1245–1248.

а для производителя Y –

$$p_C - 5 \geq p_B - 5 \quad p_C \geq p_B,$$

$$p_C - 5 \geq p_A - 5 \Rightarrow p_C \geq 6,$$

$$p_B - 5 \geq p_A - 5 \quad p_B \geq 6,$$

что завершает описание множества равновесных цен. Проекция множества равновесных цен на плоскость p_B, p_C приведена на рисунке.

6. Заключение

В работе представлена модель пространственно распределенных потребителей и производителей, являющаяся обобщением модели, описанной в (Pilnik, Radionov, Tirunin, 2025). Для построенной модели введено понятие равновесия, доказано его существование при выполнении некоторых условий регулярности и предложен конечный алгоритм его вычисления. Дальнейшие исследования могут быть

- Hochreiter S., Schmidhuber J.** (1997). Long short-term memory. *Neural Computation*, 9, 8, 1735–1780.
- Hyndman R.J., Koehler A.B., Ord J.K., Snyder R.D.** (2008). *Forecasting with exponential smoothing: The state space approach*. Berlin: Springer Science & Business Media.
- Jabeur S.B., Mefteh-Wali S., Viviani J.-L.** (2024). Forecasting gold price with the XGBoost algorithm and SHAP interaction values. *Annals of Operations Research*, 334, 1, 679–699.
- Jin H., Xia J., Zhou X.** (2018). Arrow–Debreu equilibria for rank – dependent utilities with heterogeneous probability weighting. *Mathematical Finance*, 29, 898–927.
- Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.** et al. (1995). *Microeconomic theory*. Vol. 1. Oxford: Oxford University Press New York.
- Pilnik N., Radionov S., Tipunin I.** (2025). Floor prices for spatially distributed markets. *Operational Research*, 25, 1, 1–28.
- Smets F., Wouters R.** (2003). An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the euro area. *Journal of the European Economic Association*, 1, 5, 1123–1175.
- Smets F., Wouters R.** (2007). Shocks and frictions in US business cycles: A Bayesian DSGE approach. *American Economic Review*, 97, 3, 586–606.
- Stackelberg H. von** (1934). *Marktform und gleichgewicht*. Berlin: J. Springer.
- Taylor S.J., Letham B.** (2018). Forecasting at scale. *The American Statistician*, 72, 1, 37–45.
- Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., Uszkoreit J., Jones L., Gomez A.N., Kaiser Ł., Polosukhin I.** (2017). Attention is all you need. *Advances in neural information processing systems*, 30, arXiv:1706.03762
- Zhou Y., Li T., Shi J., Qian Z.** (2019). A CEEMDAN and XGBOOST-based approach to forecast crude oil prices. *Complexity*, 8, 1, 1–15. DOI:10.1155/2019/4392785. Available at: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1155/2019/4392785>

Поступила в редакцию 03.08.2024

Received 03.08.2024

M.S. Zekhov

National Research University Higher School of Economics (HSE University),
Moscow, Russia

N.P. Pilnik

National Research University Higher School of Economics (HSE University), Lebedev
Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Federal State Budgetary
Institution “Financial Research Institute”, Moscow, Russia

S.A. Radionov

Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, HSE University,
Moscow, Russia

Constructing a set of equilibrium prices in a generalized distributed markets model

Abstract. The article discusses the generalization of a distributed markets model that describes the distribution of production volumes, sales, and prices in geographically distant markets. The interaction of agents in the model is described in terms of economic equilibrium, where agents solve their optimization problems, and their decisions must be concerted. Producers in the model are characterized by production capacities and production costs, while consumers are characterized by demand volumes. To describe the interaction between consumers and producers, a matrix of logistic costs for delivering a unit of goods from each producer to each consumer is specified. The existence of equilibrium in the model is proved under certain regularity conditions, and a finite algorithm is proposed to describe the set of equilibrium prices and volumes. The model can be used to study the effects of changes in demand and supply parameters (e.g., due to economic growth or investment in production) as well as the market logistic structure (e.g., due to sanctions).

Keywords: *logistics, spatial models, producer’s problem, oligopoly, competition.*

JEL Classification: D40, L11.

For reference: **Zekhov M.S., Pilnik N.P., Radionov S.A.** (2025). Constructing a set of equilibrium prices in a generalized distributed markets model. *Journal of the New Economic Association*, 2 (67), 25–44 (in Russian).

DOI: 10.31737/22212264_2025_2_25-44

EDN: WFMGDY