Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

Е.М. Скаржинская
ФГБОУ ВО Костромской государственный университет, Кострома

В.И. Цуриков
ФГБОУ ВО Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Кострома

Эндогенное формирование лидерства в коллективных действиях с использованием модифицированного алгоритма timing decisions

Аннотация. В статье исследуется эндогенное формирование лидерства в коллективе, совокупный доход которого положительно зависит от усилий его членов. Предлагается модификация механизма timing decisions в виде многошаговой игры, на каждом шаге которой формируется лидерство среди агентов, которые до данного шага еще не произвели своих усилий. Каждый из этих агентов выбирает между стратегией активности и стратегией выжидания. Выбирая стратегию активности, агент производит усилия с учетом известных ему усилий агентов, уже осуществивших усилия на предыдущих шагах. Выбирая стратегию выжидания, агент не производит усилий на данном шаге. На заключительном этапе производят усилия все агенты, выбравшие на всех предыдущих шагах стратегию выжидания. Предполагается, что агент, выбирающий стратегию активности, следует критерию максимина. Рассмотрен случай, когда агент не имеет информации о действиях партнеров, еще не осуществивших своих усилий. Показано, что оптимальное по критерию максимина значение усилий равно величине усилий, которые данный агент приложил бы, будучи лидером по Штакельбергу по отношению ко всем агентам, не осуществившим усилий на предыдущих шагах. Доказано, что для каждого исхода двухпериодной игры *timing decisions* найдется доминирующий его по Парето исход многошаговой игры.

Ключевые слова: *коллективные действия, лидер, равновесие Нэша, равновесие Штакельберга, улучшение по Парето, механизм timing decisions.*

Классификация JEL: C02, C62, D23, D81.

Для цитирования: **Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.** (2023). Эндогенное формирование лидерства в коллективных действиях с использованием модифицированного алгоритма timing decisions // *Журнал Новой экономической ассоциации.* № 4 (61). С. 51–68.

DOI: 10.31737/22212264_2023_4_51-68

EDN: YEPWZG

1. Введение

В статье исследуется взаимодействие членов команды, представляющее собой один из частных случаев коллективных действий. Предполагается, что получаемый в результате индивидуальных усилий членов коллектива совокупный доход распределяется в заранее оговоренных долях между всеми участниками и поэтому каждый заинтересован в его увеличении. Если агенты автономно выбирают размер прилагаемых ими усилий, то в условиях действия закона убывающей отдачи их эгоистические устремления приводят к несоответствию индивидуальных оптимумов с коллективным оптимумом. В результате при любом фиксированном распределении совокупного дохода, прилагаемые агентами усилия оказываются ниже общественно оптимальных. Достигаемый при этом равновесный по Нэшу исход является неэффективным по Парето. Для достижения любого

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

Парето-предпочтительного исхода требуется координация действий в целях осуществления усилий в большем объеме.

Если функция дохода такова, что усилия одного агента положительно влияют на эффективность усилий другого агента, существует возможность повысить эффективность коллективных действий в результате использования стратегии по Штакельбергу. Эта возможность может быть реализована в последовательной игре при условии, что в коллективе сформировано лидерство. В такого рода последовательной игре лидер (игрок, первым делающий свой ход), зная реакцию членов коллектива на свои действия, методом обратной индукции определяет оптимальный для себя размер своих усилий, которые и осуществляет в первом временном периоде. Все остальные члены коллектива (последователи), получив в результате наблюдения информацию о размере усилий, приложенных лидером, вычисляют оптимальные объемы своих усилий, которые и осуществляют во втором временном интервале. Как показано в работах (Kim, 2012; Скаржинская, Цуриков, 2021а, 2021б), оптимальные значения усилий и лидера, и его последователей в таком случае оказываются выше, чем в одновременной некооперативной игре, а результатом является совершенное по подыграм равновесие Штакельберга, доминирующее по Парето над равновесием Нэша.

Отметим, что впервые зависимость между стратегиями лидера и последователя была использована в модели Штакельберга, разработанной для описания рыночной дуополии (Stackelberg, 1934) и распространенной впоследствии на произвольное число фирм (Anderson, Engers, 1992; Linster, 1993; Ino, Matsumura, 2012; Julien, 2018). Рассмотренный в работе (Скаржинская, Цуриков, 2021а, 2021б) эндогенный механизм формирования лидерства в коллективе опирается на концепцию *timing decisions*, предложенную в статье (Hamilton, Slutsky, 1990) для формирования лидерства по Штакельбергу среди фирм в условиях рыночной дуополии.

Зависимость стратегий последователей от стратегии лидера может обеспечиваться различными факторами и механизмами. Например, в концепции, которую предложил Б. Гермалин (Hermalin, 1998), лидер обладает информационным преимуществом, заключающимся в том, что он один владеет информацией о зависимости величины отдачи от усилий агентов. Пользуясь ею, лидер либо влияет на стимулы агентов, либо убеждает последователей личным примером. В статье (Huck, Rey-Biel, 2006) агент следует за лидером, в силу того что его полезность растет по мере снижения разрыва между размерами его усилий и усилий лидера. Имеющиеся многочисленные как полевые свидетельства, так и лабораторные и полевые эксперименты действительно указывают на существование зависимости просоциального поведения от убеждений, а также – на сильное влияние, которое оказывают на эти убеждения своим поведением лидеры как образцы для подражания (Gächter, Renner, 2018).

В настоящей статье мы не используем предположения о роли лидера как примера для последователей (или об асимметричном распределении информации). Как и в работах (Gervais, Goldstein, 2007; Kim, 2012; Скаржинская, Цуриков, 2021а; 2021б), мы исходим из того, что зависимость стратегий последователей от наблюдаемой ими стратегии лидера обусловлена только комплементарностью усилий членов коллектива и стремлением каждого агента к максимуму собственного индивидуального выигрыша. В нашем случае комплементарность усилия

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

выражаются в возрастании эффективности усилий одного (любого) агента по мере повышения уровня усилий, прилагаемых другим агентом. Иначе говоря, рост усилий одного члена коллектива приводит к увеличению предельного совокупного дохода по усилиям другого.

Условия комплементарности порождают зависимость величины усилий, которые необходимо приложить любому члену коллектива для максимизации своего индивидуального выигрыша, от объема усилий, прилагаемых каждым из партнеров. Именно поэтому участник последовательной игры, имеющий намерение осуществить свои усилия до того, как это сделают другие игроки (его последователи), определяет значение усилий последователей как функцию своих усилий и затем методом обратной индукции находит их оптимальную для себя величину.

Данный принцип выбора объема усилий лидера определяется как стратегия лидера по Штакельбергу, описанная применительно к нашей модели коллективных действий в работе (Скаржинская, Цуриков, 2021a). Там же мы показали, что в этом случае и лидер, и его последователи осуществляют усилия в объеме, превышающем их объем при выборе, приводящем к равновесию Нэша в одновременной игре. В результате выигрыш каждого члена коллектива становится выше, чем в равновесии Нэша, достигаемого в некооперативной одновременной игре.

Существуют два принципиально различных способа формирования лидерства по Штакельбергу: либо агент становится лидером под действием факторов, внешних по отношению к модели (экзогенное формирование лидерства), либо лидерство формируется в рамках модели (эндогенное формирование лидерства). Эндогенное формирование лидерства в команде для условий, в некоторой степени близких к условиям нашей работы, исследовалось в работах (Kim, 2012; Gervais, Golstein, 2007; Huck, Biel, 2006). Так же, как в этих работах, мы используем механизм timing decisions.

Суть этого механизма применительно к нашей модели состоит в следующем. Перед началом игры агенты договариваются о том, что в течение определенного интервала времени (он называется первым периодом игры) каждый член коллектива может выбрать либо стратегию активности и осуществить усилия в выбранном им размере, либо стратегию выжидания и осуществить свои усилия не в первом, а во втором периоде. Так как во втором периоде усилия агентов, проявивших активность в первом периоде, становятся наблюдаемыми для всего коллектива, то агенты, выбравшие стратегию выжидания, осуществляют свои усилия, максимизируя свои выигрыши на основе полученной информации.

Исход первого периода однозначно определяет равновесный исход второго периода, а значит, и выигрыши игроков, поэтому выбор игроками своих стратегий в первом периоде можно интерпретировать как некооперативную одновременную игру G. Ее исходами являются ситуации, в каждой из которых множество агентов разделяется на два непересекающихся подмножества: множество лидеров, т.е. агентов, осуществивших свои усилия в первом периоде, и множество их последователей.

Мотивы, побуждающие игрока выбрать стратегию активности в игре G, могут иметь различную природу.

Во-первых, такой игрок может быть заинтересован в роли лидера, если эта роль дает ему наибольший выигрыш. Для существования в коллективе такого

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

агента, названного нами в (Скаржинская, Цуриков, 2021б) «особенным», требуются определенные условия, которые выполняются не во всех случаях.

Во-вторых, мотивом для лидера могут быть альтруистические соображения, в силу которых он пренебрегает разницей между своими доходами в роли лидера и в роли последователя.

В-третьих, агент может выбрать роль лидера из опасений, что никто другой этого не сделает, и в результате выигрыш агента окажется ниже его выигрыша в роли лидера. В этом случае агент выбирает роль лидера в силу своего *неприятия риска* (risk aversion), которое проявляется при выборе решений достаточно часто (Канеман, Словик, Тверски, 2005).

В-четвертых, агент может выбрать роль лидера, следуя кантовской стратегии, название которой восходит к категорическому императиву Иммануила Канта. Кантовская оптимизация опирается на принцип универсализма и описана в статье (Roemer, 2015). Такой агент следует принципу универсализма и задает себе вопрос, если я откажусь от роли лидера и все остальные участники поступят аналогичным образом, будет ли это хорошо для меня. Как видим, все эти мотивы приводят к одному результату – агент проявляет активность в первом периоде игры timing decisions. Следует также отметить, что эти мотивы могут оказаться не различимыми для внешнего наблюдателя.

В нашей работе предполагаются рациональность агентов (что исключает случайный или немотивированный выбор стратегий) и отсутствие агента, руководствующегося альтруистическими мотивами[1]. Предполагается также, что члены коллектива не следуют принципу универсализма, вследствие чего в коллективе нет кантианского агента. Таким образом, агент выбирает роль лидера, только потому, что он избегает риска и предпочитает гарантированный результат, не зависящий от стратегий других игроков. Он определяет величину своих усилий в таком объеме, в котором его гарантированный выигрыш достигает максимального значения. Другими словами, он следует стратегии максимина.

Вполне возможно, что в коллективе может найтись не один, а несколько агентов, следующих стратегии максимина. Так как в первом периоде осуществляется одновременная игра, то каждый такой агент выбирает значение своих усилий в предположении, что он является единственным лидером по Штакельбергу. В результате могут реализоваться исходы, в которых несколько агентов осуществляют в первом периоде свои усилия в объеме, равном усилиям лидера по Штакельбергу. Сравнение соответствующих исходов с тем, который достигается в игре с единственным лидером, т.е. с исходом, равновесным по Штакельбергу, проведено в работе (Скаржинская, Цуриков, 2021б). В ней показано, что при любом ненулевом числе лидеров результат игры может в некоторых частных случаях (например, когда все агенты идентичны) оказаться предпочтительным по Парето в сравнении с равновесием Нэша.

Для нашей работы особое значение имеет случай, когда по истечении первого периода остаются агенты, не осуществившие своих усилий. Если этим агентам будет опять предоставлена возможность разыграть игру timing decisions, не исключено, что среди них найдутся индивиды, готовые выбрать роль лидера. Психологически это объясняется тем, что мотивация индивидов, в частности

[1] Логично предполагать, что альтруизм агента оказывает влияние не только на проявление активности в первом периоде timing decisions, но и на величину прилагаемых агентом усилий, если он стремится не к максимизации собственного выигрыша, а к увеличению совокупного выигрыша коллектива. В данной статье такой случай не рассматривается.

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

отношение к риску, может меняться в процессе игры. Например, агент, выбравший с самого начала в первом периоде стратегию выжидания в надежде, что кто-либо из его партнеров выберет стратегию активности, может при повторном разыгрывании первого периода выбрать стратегию активности из стремления увеличить свой гарантированный выигрыш.

Отсюда отчетливо просматривается возможность дальнейшего увеличения выигрышей агентов при условии, что среди агентов, не осуществивших своих усилий в первом периоде игры timing decisions, есть индивиды, избегающие риска. Модификации игры с механизмом timing decisions, предполагающей возможность неоднократного повторения первого периода этой игры, посвящена данная статья.

2. Базовая модель. Равновесие Нэша и равновесие Штакельберга

Обозначим через n число индивидов, составляющих коллектив, а через $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ – денежный эквивалент их индивидуальных усилий, результатом которых является совокупный доход $D = D(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Считаем, что при всех $\sigma_i \in (0, \infty)$, где $i = 1, \ldots, n$, выполняются следующие условия.

1. Величина дохода возрастает с ростом прилагаемых усилий:

$$\partial D / \partial \sigma_i > 0 . \quad (1)$$

2. Для того чтобы функции выигрышей имели единственный максимум, функция дохода строго выпукла вверх. Отсюда следует, что функция дохода удовлетворяет закону убывающей отдачи:

$$\partial^2 D / \partial \sigma_i^2 < 0 . \quad (2)$$

3. Чтобы решение не уходило в нуль или на бесконечность, функция дохода удовлетворяет условиям

$$\lim_{\sigma_i \to 0} \left(\partial D / \partial \sigma_i \right) = \infty, \ \lim_{\sigma_i \to \infty} \left(\partial D / \partial \sigma_i \right) = 0. \quad (3)$$

4. Предполагаем, что усилия каждого агента оказывают положительное влияние на величину предельного дохода по усилиям любого другого члена коллектива:

$$\partial^2 D / \partial \sigma_i \partial \sigma_k > 0, \quad i \neq k. \quad (4)$$

На этапе ex ante в коллективе устанавливается правило распределения будущего ожидаемого совокупного дохода D, согласно которому агенту i принадлежит относительная доля α_i: $0 < \alpha_i < 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Выигрыш (чистый доход) агента i равен

$$U_i = \alpha_i D(\sigma_i, \sigma_{-i}) - \sigma_i, \ i = 1, \ldots, n, \quad (5)$$

где σ_{-i} – значения усилий всех членов коллектива за исключением индивида i. Каждый агент стремится к максимуму своего индивидуального выигрыша.

Предполагается, что информация о функциях дохода и выигрыша каждого агента составляет полное знание, т.е. этой информацией владеют все члены коллектива и об этом всем известно. Что касается знания относительно объемов усилий, прилагаемых тем или иным членом коллектива, оно становится известным только после полного осуществления этим агентом своих усилий.

Обратимся сначала к равновесию Нэша. Предполагается, что все агенты независимо друг от друга выбирают размер своих усилий и осуществляют их в одном временном интервале. Каждый агент стремится к максимуму своего выигрыша и, соответственно, осуществляет усилия в таком объеме, при котором

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

величина его предельного индивидуального дохода равна величине его предельных издержек:

$$\alpha_i\left(\partial D / \partial\sigma_i\right)=1,\ i=1,\ldots,n. \quad (6)$$

Единственность решения системы (6) при выполнении условий (1)–(3) доказана в работе (Скаржинская, Цуриков, 2017).

Так как каждому агенту невыгодно в одностороннем порядке осуществлять усилия в размере, не отвечающем решению системы (6), решение этой системы определяет единственный равновесный по Нэшу исход N. В дальнейшем для значения параметров в исходе N используем следующие обозначения: D^N – величина совокупного дохода, U^N – суммарный выигрыш всех членов коллектива, σ_i^N – решение системы (6), U_i^N – индивидуальный выигрыш агента i. В работах (Скаржинская, Цуриков, 2014; 2017) показано, что этот равновесный исход не является эффективным по Парето, так как при более высоких значениях усилий при условии, что их осуществляют не менее двух агентов, находятся Парето-предпочтительные состояния.

Теперь обратимся к равновесию по Штакельбергу. Предположим, что один из членов коллектива (для определенности будем считать, что агент с $i=1$) становится лидером по Штакельбергу и осуществляет усилия, наблюдаемые всеми остальными членами. Величину своих усилий он определяет из условия максимума своего выигрыша методом обратной индукции. Сначала он находит зависимости объемов усилий, отвечающих максимальным выигрышам последователей, от объема его собственных усилий. Соответствующие зависимости удовлетворяют системе

$$\alpha_j\left(\partial D / \partial\sigma_j\right)=1,\quad j=2,\ldots,n \quad (7)$$

при условии, что σ_1 принимает фиксированное значение. Система (7) имеет единственное решение в виде функций реагирования последователей на усилия лидера σ_1, которые обозначим как

$$\sigma_j=R_j(\sigma_1). \quad (8)$$

С учетом (8) выражение для выигрыша лидера примет вид

$$U_1=\alpha_1 D\left(\sigma_1, R_2(\sigma_1), R_3(\sigma_1),\ldots,R_n(\sigma_1)\right)-\sigma_1. \quad (9)$$

Максимальное значение выигрыша лидера определяется условием

$$dU_1 / d\sigma_1=0 \Rightarrow \alpha_1\left(dD / d\sigma_1\right)=1. \quad (10)$$

С учетом (7) и (8) уравнение (10) можно записать в виде

$$\frac{\partial D}{\partial\sigma_1}+\sum_j \frac{1}{\alpha_j}\frac{dR_j}{d\sigma_1}=\frac{1}{\alpha_1},\ \ j=2,\ldots,n. \quad (11)$$

Частная производная первого порядка $\partial D / \partial\sigma_i$ является убывающей функцией в силу закона убывающей отдачи. Введем дополнительные ограничения на функцию дохода, согласно которым монотонно убывающими будут и первые производные от функций реагирования $dR_j / d\sigma_1$, $j=2,\ldots,n$, причем $\lim\limits_{\sigma_1\to\infty}(dR_j / d\sigma_1)=0$. Эти условия достаточны для монотонного убывания до нуля полной производной $dD / d\sigma_1$, что обеспечивает единственность решения уравнения (10), которое мы обозначим как σ_1^L. В силу условий комплементарности (4) все производные $dR_j / d\sigma_1>0$. Соответственно, все слагаемые в левой части уравнения (11) положительны, откуда вытекает неравенство

$$dD / d\sigma_1<1 / \alpha_1. \quad (12)$$

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

С учетом закона убывающей отдачи (2) из сравнения неравенства (12) с уравнением с $i = 1$ из системы (6) следует, что

$$\sigma_1^L > \sigma_1^N. \tag{13}$$

То есть в роли лидера по Штакельбергу агент прилагает больше усилий, чем в роли автономного агента в одновременной игре, приводящей к равновесию Нэша[2]. Это повышение объема усилий со стороны лидера, согласно условию комплементарности (4), приводит к тому, что предельный доход каждого последователя при $\sigma_j = \sigma_j^N$ с $j = 2, \ldots, n$ превышает величину его предельных издержек. Поэтому каждому последователю j выгодно осуществить свои усилия в объеме, превышающем σ_j^N.

Соответственно, в равновесии Штакельберга и объем усилий, прилагаемых каждым членом коллектива, и совокупный доход, и все индивидуальные выигрыши выше, чем в равновесии Нэша:

$$\sigma_j^S > \sigma_j^N,\ D^S > D^N,\ U_j^S > U_j^N,\ U_1^S > U_1^N,\ j = 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Здесь верхний индекс S используется для обозначения значения соответствующих величин в равновесии Штакельберга.

3. Эндогенное формирование лидерства

3.1. Алгоритм формирования лидерства

В механизме timing decisions все члены коллектива осуществляют свои усилия в двух последовательных периодах заданной длительности. В первом периоде каждый агент самостоятельно выбирает либо стратегию активности, осуществляя свои усилия в объеме, который он выбирает самостоятельно, либо стратегию выжидания, воздерживаясь от усилий в первом периоде. Во втором периоде усилия осуществляют все агенты, которые выбрали в первом периоде стратегию выжидания.

В дальнейшем будем называть *G*-игрой игру, разыгрываемую в первом периоде. В механизме timing decisions *G*-игра осуществляется только один раз и только между всеми членами коллектива. После нее начинается второй период. Далее исходную игру timing decisions будем называть одношаговой.

Предположим, что по окончании *G*-игры осталось не менее двух агентов, не проявивших активности. В одношаговой игре эти агенты осуществляют свои усилия во втором периоде как последователи агентов, которые уже осуществили свои усилия в первом периоде. Очевидно, что они могут увеличить свои выигрыши, если договорятся о том, что до начала второго периода они снова разыграют, но уже только между собой, *G*-игру, которая была только что разыграна в первом периоде между всеми членами коллектива. При повторении *G*-игры может появиться новый лидер (или несколько лидеров), что, как мы установили ранее, приводит к Парето-улучшению.

Обозначим через Г новую многошаговую игру, в которой *G*-игра может разыгрываться неоднократно, и каждый раз в ней участвуют все агенты, которые к ее началу еще не осуществили своих усилий, при условии, что их число не менее двух.

В правилах новой игры необходимо учесть следующее обстоятельство. Если агенты знают, что *G*-игра повторится и в том случае, когда при ее предыдущем разыгрывании ни один из ее участников не проявил активности, то перспектива равновесия Нэша, невыгодного для каждого агента, отодвигается на неопределенный срок. Это снижает мотивацию участников *G*-игры к проявле-

[2] Строгое доказательство неравенств (13) и (14) приведено в статье (Скаржинская, Цуриков, 2021б).

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

нию активности, и может привести к бесконечному повторению G-игры, когда ни один агент не проявляет активности. Чтобы избежать подобного развития событий, правила должны предусматривать переход к заключительному этапу, аналогичному второму интервалу в одношаговой игре, в следующих случаях: 1) если в G-игре ни один участник не проявил активности; 2) если по истечении G-игры остался только один агент, не осуществивший своих усилий.

Таким образом, мы предлагаем рассмотреть игру Г, состоящую из одного или нескольких последовательных шагов, в каждом из которых разыгрывается G-игра, и завершающуюся либо G-игрой, в которой все участники проявят активность, или заключительным этапом. Заключительный этап игры Г представляет собой одновременную игру, в которой участвуют те и только те агенты, которые еще не осуществили свои усилия. В этой игре каждый участник выбирает объем своих усилий, максимизируя свой выигрыш с учетом наблюдаемых ими усилий агентов, осуществивших своих усилий до заключительного этапа.

Опишем алгоритм игры Г более подробно. Обозначим через I множество всех членов коллектива, а через L_k – множество агентов, проявивших активность в G-игре на шаге k, где $1 \le k \le n-1$. Игра Г начинается с первого шага, на котором G-игра разыгрывается на множестве I. По окончании G-игры все члены коллектива наблюдают усилия агентов из множества L_1, элементами которого являются игроки, выбравшие на первом шаге стратегию активности. Если множество L_1 пустое, т.е. никто из членов коллектива не взял на себя роль лидера, осуществляется заключительный этап игры Г – в коллективе разыгрывается одновременная игра между всеми его членами, описанная в базовой модели и имеющая единственный исход в виде равновесия Нэша.

Если множество L_1 непустое, а множество $I \setminus L_1$ пустое, т.е. если на первом шаге осуществили свои усилия все члены коллектива, то игра Г закончена и им осталось только поделить соответствующий этим усилиям доход. Если множество L_1 непустое, а множество $I \setminus L_1$ содержит только один элемент (т.е. усилия осуществили все члены коллектива за исключением одного агента), тогда наступает заключительный этап, в котором оставшийся агент производит усилия, максимизируя свой выигрыш с учетом усилий всех остальных членов коллектива.

Только в том случае, в котором множество L_1 непустое и множество $I \setminus L_1$ содержит не менее двух элементов, в игре Г наступает второй шаг: G-игра разыгрывается среди игроков, образующих множество $I \setminus L_1$. Каждый игрок выбирает либо стратегию выжидания, либо стратегию активности, осуществляя свои усилия с учетом значений усилий агентов из множества L_1. По окончании этой G-игры становятся известными усилия агентов, выбравших на втором шаге стратегию активности. Переход к третьему шагу осуществляется в том и только в том случае, в котором непустым оказывается множество L_2, а множество $I \setminus (L_1 \cup L_2)$ содержит не менее двух элементов. В противном случае игра Г или оказывается законченной, или переходит на заключительный этап, в котором последователи максимизируют свои выигрыши с учетом значений усилий лидеров. Аналогично происходит переход к каждому последующему шагу или к заключительному этапу или игра Г заканчивается.

Игра Г может закончиться одним из следующих исходов: либо лидерами становятся агенты из множества $L(\Gamma) = L_1 \cup \ldots \cup L_k$, а их последователями – агенты

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

из множества $I \setminus L(\Gamma)$, либо исходом, в котором лидерами будут все члены коллектива, т.е. $L(\Gamma) = I$, либо исходом, соответствующим равновесию Нэша в базовой модели. При этом агенты из множества L_2 являются последователями игроков из множества L_1 и лидерами по отношению к агентам из множества $I \setminus (L_1 \cup L_2)$, и так далее. Наибольшее число шагов, равное $k_{max} = n - 1$, реализуется в случае, в котором при каждом разыгрывании G-игры стратегию активности выбирает один и только один агент. Предлагаемую игру Г можно рассматривать как обобщение одношаговой игры с механизмом timing decisions, так как все ее исходы будут подмножеством возможных исходов игры Г.

Принципиальное значение имеют побуждения агентов при выборе стратегии в G-игре. На каждом шаге, в котором разыгрывается G-игра, стратегия выжидания выгоднее стратегии активности для каждого агента при условии, что активность проявит другой участник. Однако если все агенты выберут в G-игре стратегию выжидания, то согласно правилам игры Г начнется заключительный этап и каждому участнику G-игры достанется выигрыш, значение которого ниже того выигрыша, который он мог бы получить в качестве лидера в G-игре.

Для рационального экономического агента решение возникшей дилеммы зависит от его чувствительности к риску и от ожиданий по поводу стратегий партнеров. Если игрок чувствителен к риску и (или) низко оценивает вероятность того, что кто-либо из партнеров проявит активность в G-игре, то он выбирает стратегию активности. В противном случае агент выбирает стратегию выжидания, так как она может дать больший выигрыш в случае когда хотя бы один из его партнеров проявит в первом периоде активность. Итак, в дальнейшем предполагается, что при разыгрывании G-игры на любом шаге стратегию активности игроки выбирают в силу неприятия риска и стремления получить гарантированный результат. Следует также учесть, что агент $i \in L_k$ не имеет информации о том, сколько последующих шагов будет реализовано и какие именно игроки проявят в них активность, поэтому он выбирает величину своих усилий из условия максимума своего гарантированного выигрыша.

В данной статье мы рассмотрим стратегию лидера в предположении, что каждый агент, выбравший на некотором шаге k роль лидера, не знает, как будет разыгрываться игра Г после шага k.

3.2. Стратегия агента, выбирающего роль лидера

Рассмотрим поведение агента i из множества $I \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1})$, т.е. агента, еще не осуществившего к моменту окончания шага $k-1$ своих усилий и не имеющего информации относительно намерений его партнеров после шага $k-1$. Покажем, что *если он руководствуется критерием максимина, его оптимальной стратегией будет стратегия лидера по Штакельбергу*, к последователям которой принадлежат агенты из множества $I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$. Для этого приступим к последовательному рассмотрению возможных случаев.

Шаг k может реализоваться только при условии, что непустыми являются все множества $L_1, \ldots, L_{k-1}$ и множество $I \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1})$ содержит не менее двух элементов. Тогда на шаге k осуществляется G-игра, участниками которой будут все агенты множества $I \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1})$. Каждому из них известны значения усилий агентов из множества $L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1}$ и, следовательно, участники G-игры выбирают свои стратегии при заданных значениях усилий $\sigma_r, r \in L_m$, $m = 1, \ldots, k-1$.

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

Обозначим кортеж этих значений как $[\sigma_r]_{k-1}$ и найдем оптимальное значение усилий лидера по Штакельбергу на шаге k для произвольных значений элементов этого кортежа.

Найдем объем усилий агента i, если он при этих условиях выбирает на шаге k стратегию активности и роль лидера по Штакельбергу по отношению ко всем агентам множества $I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$. Тогда значение его усилий является решением уравнения

$$\alpha_i \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_j \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{dR_j}{d\sigma_i} = 1, \; j \in I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right), \tag{15}$$

где $R_j = R_j(\sigma_i)$ определяются для каждого фиксированного значения σ_i из системы уравнений

$$\alpha_j \frac{\partial D}{\partial \sigma_j} = 1, \; j \in I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right) \tag{16}$$

при заданных значениях $[\sigma_r]_{k-1}$. Обозначим решение уравнения (15) как $\sigma_i = \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$. Это решение представляет собой величину усилий агента i как лидера по Штакельбергу на шаге k при условии, что агенты, выбравшие стратегию активности на предыдущих шагах, произвели усилия $[\sigma_r]_{k-1}$.

Пусть на шаге k агент i осуществил усилия в объеме $\sigma_i = \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$. Если агент i окажется единственным лидером на шаге k, а на шаге $k+1$ ни один агент не проявит активности, то реализуется исход, который мы обозначим как S_k. В игре с исходом S_k все игроки $j \in I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$ будут последователями агента i и произведут на заключительном этапе игры Г усилия в размерах $\sigma_j^{F_k} = R_j\left(\sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)\right)$.

Величина общего дохода в исходе S_k примет значение $D(S_k)$, которое получается в результате подстановки в функцию $D = D(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ значений σ_r, $\sigma_i = \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$ и $\sigma_j^{F_k} = R_j\left(\sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)\right)$, где $r \in L_m$, $m = 1,\ldots,k-1$, $j \in I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$. Выигрыш агента i, играющего на шаге k роль лидера по Штакельбергу, принимает значение

$$U_i^{S_k} = \alpha_i D(S_k) - \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right). \tag{17}$$

Предположим, что агент i осуществит усилия в размере $\sigma_i \neq \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$. Тогда если агент i окажется единственным лидером на шаге k и на шаге $k+1$ ни один агент не проявит активности, то выигрыш агента окажется меньше, чем $U_i^{S_k}$, так как в этих условиях именно стратегия $\sigma_i = \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$ является оптимальной. Соответственно, и его гарантированный выигрыш будет меньше, чем $U_i^{S_k}$.

Зафиксируем полученные выводы.

Вывод 1. Гарантированный выигрыш[3] агента i не может превысить $U_i^{S_k}$.

Вывод 2. Если для агента i, проявляющего активность на шаге k, существует объем усилий, оптимальный по критерию максимина, то он равен $\sigma_i = \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$.

Пусть на шаге k агент i прилагает усилия в размере $\sigma_i = \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$, а на шаге $k+1$ ни один агент не проявляет активности. Если агент i окажется единственным агентом, проявившим активность на шаге k, то, как показано выше, он получит выигрыш в размере $U_i^{S_k}$. Если же на шаге k проявят активность и некоторые другие агенты (партнеры), то выигрыш агента i может увеличиться или уменьшиться в зависимости от прилагаемых ими усилий. Если каждый его пар-

[3] Существуют исходы игры Г, в которых выигрыш данного агента будет больше, чем $U_i^{S_k}$. Но гарантированный выигрыш, равный наименьшему из всех его возможных значений, не может превысить любого из этих значений и, следовательно, не может превысить значения $U_i^{S_k}$.

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

тнер, из числа проявивших активность на шаге k, осуществит свои усилия в объеме не ниже тех усилий, которые он осуществил бы в качестве последователя агента i, то выигрыш агента i будет не ниже $U_i^{S_k}$. В противном случае выигрыш агента i может оказаться меньше, чем $U_i^{S_k}$. Но агент $i \in L_k$ может избежать подобной ситуации, прибегнув к стратегии объявленного действия, применение которой гарантирует, что ни один из его партнеров не проявит активности на шаге k. Соответственно, мы приходим к следующему выводу.

Вывод 3. Если на шаге k агент i прилагает усилия в размере $\sigma_i = \sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$ и на следующем шаге ни один из агентов не проявит активности, то агент i, применив стратегию объявленного действия, получает гарантированный выигрыш в размере $U_i^{S_k}$.

Рассмотрим игру Γ на шаге $n-1$, на котором G-игра разыгрывается между двумя агентами. Игра Γ либо заканчивается на шаге $n-1$ (если оба агента проявили активность), либо переходит к своему заключительному этапу. Как следует из выводов 2 и 3, агент, проявляющий активность на шаге $n-1$ и применяющий стратегию объявленного действия, получит гарантированный выигрыш в размере $U_i^{S_{n-1}}$ тогда и только тогда, когда он осуществит усилия в объеме своих усилий в роли лидера по Штакельбергу на этом шаге. Таким образом, мы получаем следующий существенный для дальнейших рассуждений вывод.

Вывод 4. Если агент, выбирающий стратегию по критерию максимина, проявляет активность в G-игре на шаге $n-1$, он осуществит усилия в объеме своих усилий в роли лидера по Штакельбергу на этом шаге.

Покажем, что описанная выше стратегия лидера i на шаге k обеспечивает ему гарантированный выигрыш в размере $U_i^{S_k}$ и в том случае, когда на шаге $k+1$ хотя бы один участник игры выберет стратегию активности.

Сравним описанный выше исход S_k с исходом S_{k+1}, реализующимся в том случае если на шаге $k+1$ только один агент производит усилия в размере своих усилий лидера по Штакельбергу на шаге $k+1$, а на шаге $k+2$ ни один агент не проявляет активности. В исходе S_k усилия агентов, не проявивших активности на шагах $1, \ldots, k$, определяются из условий равновесия Нэша в одновременной игре, которая осуществляется на заключительном этапе игры Γ между агентами $j \in I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$. В исходе S_{k+1} усилия этих же агентов определяются из условий равновесия по Штакельбергу. Так как в равновесии по Штакельбергу усилия каждого участника выше, чем в равновесном по Нэшу исходе, усилия каждого агента $j \in I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$ в исходе S_{k+1} выше, чем в исходе S_k.

Соответственно, и общий доход в исходе S_{k+1}, и выигрыш каждого агента из множества $L_1 \cup \ldots \cup L_k$ выше, чем в исходе S_k. К аналогичным выводам мы приходим при сравнении исхода S_{k+1} и S_{k+2}, исходов S_{k+2} и S_{k+3}, и т.д. Таким образом, реализация каждого шага m, где $m > k$, при условии, что на шаге m проявляет активность только один агент, производящий усилия в объеме своих усилий в роли лидера по Штакельбергу на этом шаге, приводит к увеличению выигрыша каждого агента из множества $L_1 \cup \ldots \cup L_k$. Зафиксируем полученный вывод.

Вывод 5. Пусть на каждом шаге m игры Γ, где $m \in [k+1, n-1]$, выполняется следующее условие. Агент, проявляющий активность на шаге m, производит усилия в объеме, равном его усилиям в роли лидера по Штакельбергу на данном шаге, и применяет стратегию объявленного действия. Тогда для всех агентов из множе-

Журнал НЭА,
№ 4 (61), 2023,
с. 51–68

ства $L_1 \cup ... \cup L_k$ исход, в котором на шаге $k+1$ активность проявляет только один агент, предпочтительнее, чем исход, в котором на шаге $k+1$ ни один агент не проявляет активности. Как следствие, наименьшее значение выигрыша агента i, проявившего активность на шаге k игры Г с применением стратегии объявленного действия и осуществившего свои усилия в размере $\sigma_i^{S_k}([\sigma_r]_{k-1})$, равно $U_i^{S_k}$.

Выводы 1–5 доказывают справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть на всех шагах игры* Г *агенты, выбирающие стратегию активности, следуют критерию максимина, и это является общим знанием. Тогда на произвольном шаге* $k \in [1, n-1]$ *каждый агент, выбравший роль лидера и применяющий стратегию объявленного действия, получит выигрыш не меньший, чем выигрыш, получаемый им в качестве лидера по Штакельбергу на шаге k, в том и только в том случае, когда он осуществляет свои усилия в объеме, равном объему усилий, прилагаемых им в качестве лидера по Штакельбергу на шаге k.*

Так как предполагается, что все агенты рациональны и каждый из них проявляет активность только в силу своего неприятия риска, то логично предположить, что это знание, как и справедливость теоремы 1, составляет общее знание. Как следствие, все участники игры Г знают, что любой агент, проявивший активность на некотором шаге, произведет усилия, соответствующие его усилиям в роли лидера по Штакельбергу на данном шаге.

Вернемся к вопросу о том, в каком случае стратегия объявленного действия является необходимым условием для получения агентом гарантированного выигрыша, равного выигрышу, который он получил бы в роли единственного лидера по Штакельбергу на данном шаге.

Рассмотрим игру Г на произвольном шаге k, на котором G-игра разыгрывается между агентами из множества $I \setminus (L_1 \cup ... \cup L_{k-1})$. Пусть агент $i \in I \setminus (L_1 \cup ... \cup L_{k-1})$ проявляет на данном шаге активность и производит усилия в размере $\sigma_i^{S_k}([\sigma_r]_{k-1})$. Как зафиксировано в выводе 5, чем больше шагов в игре Г будет реализовано после шага k, тем больший выигрыш получит агент i. Соответственно, агент, следующий критерию максимина, максимизирует тот минимальный выигрыш, который он получит в случае когда на шаге $k+1$ ни один агент не проявит активности.

Если агент i применит стратегии объявленного действия, тогда все другие игроки множества $I \setminus (L_1 \cup ... \cup L_{k-1} \cup \{i\})$ не проявят активности на шаге k. Если при этом на шаге $k+1$ ни один агент из этого множества не проявит активности, то за шагом $k+1$ наступит заключительный этап игры Г, на котором каждый агент $j \in I \setminus (L_1 \cup ... \cup L_k)$ произведет усилия в объеме $\sigma_j^{F_k} = R_j(\sigma_i^{S_k}([\sigma_r]_{k-1}))$ как последователь агента i. Выигрыш агента i составит величину $U_i^{S_k}$.

Если же агент i не применит стратегии объявленного действия, может найтись хотя бы один агент $j \in I \setminus (L_1 \cup ... \cup L_{k-1} \cup \{i\})$, который также проявит активность на шаге k и произведет усилия в объеме, соответствующем его усилиям в роли единственного лидера по Штакельбергу на данном шаге, т.е. в объеме $\sigma_j^{S_k}([\sigma_r]_{k-1})$. Выигрыш, который получит агент i в случае когда на шаге $k+1$ ни один агент не проявит активности, положительно зависит от усилий его партнеров, поэтому игрок i, решая вопрос о применении стратегии объявленного действия, сравнивает для каждого игрока из множества $I \setminus (L_1 \cup ... \cup L_{k-1} \cup \{i\})$ его усилия в качестве своего последователя с его усилиями в качестве лидера на шаге k.

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

Если хотя бы для одного агента из множества $I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$ выполняется неравенство

$$\sigma_j^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right) < R_j\left(\sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)\right), \tag{18}$$

выигрыш агента i может оказаться меньше величины $U_i^{S_k}$. Поэтому агент i, не применивший стратегии объявленного действия, получит гарантированный выигрыш равным $U_i^{S_k}$ только в том случае, в котором неравенство (18) не выполняется ни для одного агента из множества $I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$.

Таким образом, условия теоремы 1 могут быть ослаблены. Этот вывод мы зафиксируем в теореме 2, которая отражает тот факт, что агент выбирает стратегии активности только в силу своего неприятия риска.

Теорема 2. *Пусть каждый участник i игры* Γ, *проявляющий активность на ее произвольном шаге k, выбирает размер своих усилий по критерию максимина. Тогда оптимальным размером усилий агента i является величина* $\sigma_i^{S_k}\left([\sigma_r]_{k-1}\right)$. *Если при этом агент i применяет стратегию объявленного действия во всех случаях, когда хотя бы для одного агента* $j \in I \setminus \left(L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup \{i\}\right)$ *справедливо неравенство* (18), *то гарантированный выигрыш агента будет равен величине* $U_i^{S_k}$.

3.3. Равновесия, совершенные по подыграм

Найдем для игры Γ равновесия, совершенные по подыграм. Начнем с подыгры игры Γ, которой является игра G, разыгрываемая между n агентами на первом шаге. Эта игра имеет 2^n исходов, но равновесными по Нэшу будут только те из них, в которых активность проявляет один агент из n. Объяснение состоит в том, что лучшим ответом участника игры на стратегию активности хотя бы одного из его партнеров является стратегия выжидания, а лучшим ответом игрока на стратегии выжидания, выбранные всеми его партнерами, будет стратегия активности.

Присвоим активному участнику номер $i(1)$. Согласно теореме 2 оптимальное по критерию максимина значение усилий активного участника равно объему его усилий лидера по Штакельбергу, последователями которого являются агенты $I \setminus \{i(1)\}$. Следовательно, объем усилий активного участника $\sigma_{i(1)}^{L_1}$ определяется из уравнения

$$\alpha_{i(1)} \frac{\partial D}{\partial \sigma_{i(1)}} + \sum_j \frac{\alpha_{i(1)}}{\alpha_j} \frac{dR_j}{d\sigma_{i(1)}} = 1,\ I \setminus \{i(1)\}, \tag{19}$$

где $R_j = R_j(\sigma_{i(1)})$ функции реагирования последователей агента $i(1)$. Для каждого фиксированного значения $\sigma_{i(1)}$ функции реагирования находятся из системы уравнений

$$\alpha_j\left(\partial D / \partial \sigma_j\right) = 1,\ j \in I \setminus \{i(1)\}. \tag{20}$$

Аналогично, равновесие Нэша в каждой подыгре G, разыгрываемой на 2 шаге между $n-1$ агентами, также достигается в одном из исходов[4], в каждом из которых активность проявляет только один из $n-1$ участников. Присвоим активному участнику номер $i(2)$. Усилия активного участника $\sigma_{i(2)}^{L_2}$ получим из уравнения

$$\alpha_{i(2)} \frac{\partial D}{\partial \sigma_{i(2)}} + \sum_j \frac{\alpha_{i(2)}}{\alpha_j} \frac{dR_j}{d\sigma_{i(2)}} = 1,\ j \in I \setminus \{i(1) \cup i(2)\}, \tag{21}$$

где $R_j = R_j(\sigma_{i(2)})$ — функции реагирования последователей агентов $i(1)$ и $i(2)$. Для каждого фиксированного значения $\sigma_{i(2)}$ функции реагирования определяются из

[4] Напомним, что по правилам игры Г шаг 2 может осуществиться только в том случае если на шаге 1 хотя бы один агент проявил активность.

Журнал НЭА,
№ 4 (61), 2023,
с. 51–68

системы уравнений

$$\alpha_j\left(\partial D / \partial\sigma_j\right) = 1,\ j \in I \setminus \{i(1) \cup i(2)\}. \tag{22}$$

Точно так же, в подыграх G, на шаге $k = 3, \dots, n-1$, равновесие Нэша достигается в любом из исходов, в которых активность проявляет один и только один участник игры G на этом шаге, причем объем усилий активного агента равен его усилиям в роли лидера по Штакельбергу.

На последнем шаге $n-1$ игра G разыгрывается между двумя участниками. В равновесии Нэша активность проявляет только один игрок, которого мы обозначим как $\sigma_{i(n-1)}$. Оптимальное по критерию максимина значение его усилий $\sigma_{i(n-1)}^{L_{n-1}}$ найдем из уравнения

$$\alpha_{i(n-1)}\frac{\partial D}{\partial\sigma_{i(n-1)}} + \frac{\alpha_{i(n-1)}}{\alpha_n}\frac{dR_{i(n)}}{d\sigma_{i(n-1)}} = 1, \tag{23}$$

где $R_{i(n)} = R_{i(n)}(\sigma_{i(n-1)})$ – функция реагирования участника, не проявившего активности ни на одном из шагов $1, \dots, n-1$ игры Г, определяемая уравнением

$$\alpha_{i(n)}\left(\partial D / \partial\sigma_n\right) = 1. \tag{24}$$

Рассмотрим подыгру, состоящую в разыгрывании игры G последовательно на шагах $1, \dots, k$. Так как на каждом шаге разыгрывания игры G ее равновесиями по Нэшу будут исходы, в которых активность проявляет только один участник, то в рассматриваемой подыгре равновесными по Нэшу будут исходы, в которых на каждом шаге активным будет только один агент. В частности, равновесие Нэша в подыгре, состоящей из $n-1$ шагов игры Г, соответствует исходу, в котором на каждом шаге активность проявил только один агент. Таким образом, в равновесном исходе этой подыгры активность проявляют $n-1$ агентов.

На заключительном этапе игры Г разыгрывается одновременная игра, участниками которой становятся агенты, не проявившие активности на всех предыдущих шагах и являющиеся, таким образом, последователями агентов, выбравших роль лидера. Каждый участник этой игры выбирает объем усилий, максимизирующих его выигрыш при известных ему значениях усилий лидеров. Как следует из базовой модели, игра, разыгрываемая на заключительном этапе, имеет единственное равновесие Нэша, в котором усилия каждого участника определяется как значение его функции реагирования на усилия агентов, осуществленные на прошлых шагах.

В исходе, равновесном по подыграм, участником игры на заключительном этапе остается только один игрок $i(n)$, не проявивший активности ни на одном ее шаге, и он производит усилия в объеме $\sigma_{i(n)}^{F_n} = R_{i(n)}\left(\sigma_{i(n-1)}^{L_{n-1}}\right)$. Следовательно, равновесный профиль стратегий можно представить в виде кортежа

$$\left[\sigma_{i(1)}^{L_1}, \dots, \sigma_{i(n-1)}^{L_{n-1}}, \sigma_{i(n)}^{F_n}\right]. \tag{25}$$

Таким образом, число исходов, равновесных по подыграм в игре Г, равно числу перестановок на множестве I, т.е. равно n!.

Заметим, что для реализации исхода, равновесного по подыграм, требуется выполнение довольно жестких условий. Во-первых, необходимо, чтобы все члены коллектива, за исключением, может быть, одного, стремились получить гарантированный результат и вследствие этого проявляли активность на некотором шаге игры Г. Во-вторых, необходимо, чтобы на каждом шаге активность проявлял только один агент, что требует от него использовать стратегию объяв-

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

ленного действия. Так как эти условия выполняются далеко не всегда, то равновесие может не достигаться.

Исход, равновесный по подыграм, совсем не обязательно доминирует по Парето любой из неравновесных исходов. Если, например, выигрыш агента $i(1)$ будет больше в том случае когда на первом шаге активность проявит не только он, этому агенту невыгодно применять стратегию объявленного действия. Если он не объявит, что собирается проявить активность на первом шаге, то вместе с ним могут осуществить усилия некоторые из его партнеров. В этом случае реализуется исход игры Г, не равновесный по подыграм. Этот исход для игрока $i(1)$ выгоднее равновесного исхода, но выигрыши его партнеров могут оказаться ниже, чем в том или ином равновесном исходе.

Теперь сравним эффективность эндогенного формирования лидерства в одношаговой игре с эффективностью формирования лидерства в игре Г. Нетрудно убедиться, что множество исходов одношаговой игры является подмножеством исходов игры Г. Действительно, все множество исходов одношаговой игры timing decisions состоит из тех исходов игры Г, в которых множество L_2 оказывается пустым. Соответственно, исходы с непустым множеством L_2 не входят во множество исходов игры timing decisions.

Сравним по Парето возможные варианты одношаговой игры с возможными вариантами многошаговой игры Г. Для этого рассмотрим произвольный исход S игры timing decisions. Исход S определяется множеством L_1 агентов, проявивших активность в первом периоде. Многошаговая игра Г приводит к тому же исходу S, если на первом шаге этой игры активность проявят все агенты из множества L_1, и только они, а сразу за первым или за вторым шагом будет осуществлен заключительный этап игры Г. Это возможно только в трех случаях.

1. Множество L_1 окажется пустым — такой исход является доминируемым по Парето любым исходом игры Г с непустым множеством L_1.

2. Множество L_1 содержит n или $n-1$ агентов — в этом случае переход ко второму шагу игры Г невозможен. Такой исход S может оказаться не сравнимым по Парето с исходами, в которых численность множества L_1 меньше, чем $n-1$.

3. Численность множества L_1 больше нуля, но меньше, чем $n-1$. В этом случае в игре Г осуществляется переход ко второму шагу и, для того чтобы реализовался исход S, необходимо и достаточно, чтобы на втором шаге ни один участник игры не проявил активности. Такой исход S доминируется по Парето любым другим исходом игры Г, в котором множество агентов, проявивших активность на первом шаге, совпадает с L_1, а на втором шаге один из участников игры проявляет активность.

Таким образом, приходим к выводу, что для любого возможного исхода S одношаговой игры, в котором число агентов, проявивших активность в первом периоде, не превышает $n-2$, найдется хотя бы один исход многошаговой игры Г, доминирующий исход S по Парето. Следовательно, механизм игры Г содержит больше возможностей для повышения эффективности коллективных действий, чем механизм одношаговой игры.

Журнал НЭА,
№ 4 (61), 2023,
с. 51–68

Заключение

Многошаговая игра Г, в которой формирование лидерства может происходить на каждом шаге, является модификацией механизма timing decisions. Мы показали, что данная модификация в большей степени способствует повышению эффективности коллективных действий, чем исходная модель timing decisions.

Рассмотренная в статье модель основана на предположении, что агент, выбирающий стратегию активности, стремится получить максимальный гарантированный результат. Другими словами, агент выбирает роль лидера по соображениям осторожности. В рамках данного предположения лидер на каждом шаге игры Г производит усилия в том объеме, который он произвел бы, считая себя лидером по Штакельбергу по отношению ко всем агентам, которые не произвели усилий до данного шага. И только при таком объеме усилий наименьший выигрыш лидера равен выигрышу, который он получает в случае, когда он действительно будет единственным лидером по Штакельбергу на шаге, в котором он проявляет активность, и за этим шагом последует заключительный этап игры Г.

Лидер вынужден следовать стратегии максимина вследствие своей неосведомленности относительно действий партнеров, еще не осуществивших своих усилий. Если бы лидер знал, кто из партнеров проявит активность на последующих шагах, он мог бы выбрать стратегию более эффективную, чем стратегия максимина. Разумеется, такой вариант возможен только в том случае когда члены коллектива обмениваются достоверной информацией о своих будущих действиях, т.е. в определенной степени действуют согласованно. Математические модели такой игры, более эффективной с точки зрения коллективных действий, чем игра Г, являются направлением дальнейших исследований.

Мы показали, что для получения гарантированного выигрыша лидер должен иметь возможность использовать или не использовать по своему усмотрению стратегию объявленного действия.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

Канеман Д., Словик П., Тверски А. (2005). Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения. Харьков: Издательство Институт прикладной психологии «Гуманитарный Центр». [**Kahneman D., Slovik P., Tversky A.** (2005). *Making decisions in uncertainty: Rules and prejudices.* Kharkov: Institute of Applied Psychology “Humanitarian Center” Publishing House (in Russian).]

Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2014). К вопросу об эффективности коллективных действий // *Российский журнал менеджмента.* № 3. С. 87–106. [**Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I.** (2014). On the issue of the effectiveness of collective action. *Russian Management Journal*, 3, 87–106 (in Russian).]

Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2017). Экономико-математический анализ эффективности принципа «От каждого – по способностям, каждому – по труду» // *Журнал экономической теории*, 2, 110–122. [**Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I.** (2017). Economic-mathematical analysis of the efficiency conditions of the principle “from each according to his ability, to each according to his work”. *Journal of Economic Theory (Russian)*, 2, 110–122 (in Russian).]

Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2021a). Эндогенное формирование в команде лидерства по Штакельбергу. Эффект образования коалиции // *Журнал Новой эконо-*

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

мической ассоциации, 1 (49), 53–79. [**Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I.** (2021a). Endogenous Stackelberg leadership within a team. The coalition effect. *Journal of the New Economic Association*, 1 (49), 53–79 (in Russian).]

Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2021б). Лидер по Штакельбергу в модели коллективных действий // *Экономика и математические методы*. Т. 57. № 4. С. 117–128. [**Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I.** (2021b). Stackelberg leader in a collective action model. *Economics and Mathematical Methods,* 57 (4), 103–115 (in Russian).]

Anderson S., Engers M. (1992). Stack!elberg versus Cournot oligopoly equilibrium. *International Journal of Industrial Organization*, 10 (1), 127–135.

Gächter S., Renner E. (2018). Leaders as role models and 'belief managers' in social dilemmas. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 154 (C), 321–334.

Gervais S., Goldstein I. (2007). The positive effects of biased self-perceptions in firms. *Review of Finance*, 11 (3), 453–496.

Hamilton J., Slutsky S. *(1990).* Endogenous timing in duopoly games: Stackelberg or Cournot equilibria. *Games and Economic Behavior*, 2, 29–46.

Hermalin B. (1998). Toward an economic theory of leadership: Leading by example. *The American Economic Review*, 88, 1188–1206.

Huck S., Rey-Biel P. (2006). Endogenous leadership in teams. *Journal of Institutional and Theoretical Economics,* 162, 2, 253–261.

Ino H., Matsumura T. (2012). How many firms should be leaders? Beneficial concentrations revisited. *International Economic Review*, 53, 4, 1323–1340.

Julien L. (2018). Stackelberg games. In: *Handbook of game theory and industrial organisation.* Vol. 1. Chap. 10. Cheltenham Glos: Edward Elgar Publ., 261–311.

Kim J. (2012). Endogenous leadership in incentive contracts. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 82 (1), 256–266.

Linster B. (1993). Stackelberg rent-seeking. *Public Choice*, 77 (2), 307–321.

Roemer J. (2015). Kantian optimization. A microfoundation for cooperation. *Journal Public Economics,* 127 (C), 45–57.

Stackelberg H. (1934). *Marktform und Gleichgewicht.* Wien, Berlin: J. Springer.

Поступила в редакцию 18.12.2022

Received 18.12.2022

Журнал НЭА, № 4 (61), 2023, с. 51–68

E.M. Skarzhinskaya
Kostroma State University, Kostroma, Russia

V.I. Tzurikov
Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia

The endogenous formation of leadership in collective actions using the modified timing decisions algorithm

Abstract. The paper explores endogenous formation of leadership within a collective which aggregate income dependents on effort invested by each member. The timing decisions mechanism is modified into a multi-step game. At each step formation of leadership occurs across agents who invest no effort up to that point. Each agent chooses between active and waiting strategy. By choosing the active strategy, agents put in their effort considering the effort by agents at earlier steps. By choosing the waiting strategy, agents abstain from effort at the current step. In a final step all agents who had chosen the waiting strategy invest their effort. We assume that agents will choose the active strategy in pursuance of maximum guaranteed gain. A case is examined where an agent choosing a strategy has no information on the actions of agents who are yet to invest their effort. We show that the optimum value of the leader's effort per the maximin criterion equals the amount of effort which the agent would invest as a Stackelberg leader relative to all other agents who have not invested efforts at earlier steps. We prove that for every outcome of the two-period timing decisions game, a Pareto-dominant outcome exists within a multi-step game.

Keywords: *collective action, leader, Nash equilibrium, Stackelberg equilibrium, Pareto improvement, timing decisions mechanism.*

JEL Classification: C02, C62, D23, D81.

For reference: **Skarzhinskaya E.M., Tzurikov V.I.** (2023). The endogenous formation of leadership in collective actions using the modified timing decisions algorithm. *Journal of the New Economic Association*, 4 (61), 51–68 (in Russian).

DOI: 10.31737/22212264_2023_4_51-68

EDN: YEPWZG