

**Р.А. Копалиани**

ПАО «Банк «Санкт-Петербург»», Санкт-Петербург

**Н.А. Денисов**

ПАО «Банк «Санкт-Петербург»», Санкт-Петербург

## **Ценообразование и построение поверхности волатильности композитного опциона**

**Аннотация.** В работе предложена методология построения поверхности волатильности кросс-актива. Данная поверхность дает возможность оценивать стоимость и метрики риска опционов на кросс-активы, которые не имеют ликвидного рынка опционов, но могут быть синтезированы через композицию двух ликвидных инструментов. Предложен вариант вывода аналитической формулы для оценки стоимости европейского опциона на кросс-актив, приведены выражения для расчета мер риска («греки»). Ключевыми параметрами для построения поверхности кросс-актива являются корреляция между компонентами кросс-актива и вмененные волатильности компонентов кросс-актива. Представлены различные подходы для оценки коэффициента такой корреляции: 1) историческая корреляция; 2) с помощью модели динамической условной корреляции; 3) вмененная корреляция. Продемонстрировано, что в случае если волатильность «на деньгах» кросс-актива известна, то вмененная корреляция вычисляется явно, в противном случае можно использовать историческую корреляцию или модель DCC-GARCH (1, 1). Показано, что, фиксируя вмененную волатильность «на деньгах» менее рискованного актива и варьируя вмененную волатильность более рискованного актива, можно получить поверхность волатильности кросс-актива, наиболее близкую к наблюдаемой. Статья содержит строгие теоретические выкладки и дает возможность оценивать на практике композитные опционы.

**Ключевые слова:** *кросс-актив, экзотический опцион, GARCH, вмененная волатильность, ценообразование, вмененная корреляция.*

Классификация JEL: C00, G13, G12.

Для цитирования: **Копалиани Р.А., Денисов Н.А.** (2023). Ценообразование и построение поверхности волатильности композитного опциона // *Журнал Новой экономической ассоциации.* № 3 (60). С. 27–48.

DOI: 10.31737/22212264\_2023\_3\_27-48

EDN: CXCGZP

### **1. Введение**

Композитный опцион, или опцион на кросс-актив, – производный финансовый инструмент, предназначенный для инвесторов, которые хотят реализовать опционную стратегию на некоторый базовый актив и при этом зафиксировать цену исполнения и получить выплату в валюте, отличной от той, в которой номинирован такой актив. Для простоты описания будем называть валюту номинала актива иностранной, или внешней; сам актив – иностранным; желаемую валюту инвестора – национальной, или внутренней, безотносительно фактической принадлежности актива и инвестора к той или иной стране, месту обращения или валютной зоне; обменный курс – курс конвертации иностранной, или внешней, валюты в национальную (внутреннюю валюту).

Функция выплаты композитного колл-опциона выражается в национальной валюте и может быть представлена формулой  $f(T) = \max(0, S_1(T)S_2(T) - K)$ , где  $T$  – момент истечения опциона;  $S_1(T)$  – обменный курс иностранной валюты в национальную (валютная пара  $S_1$ ) в момент  $T$ ;  $S_2(T)$  – стоимость иностранного актива  $S_2$ , выраженная в иностранной валюте в момент  $T$ ;  $K$  – цена исполнения опциона в национальной валюте инвестора. Владелец такого дериватива подвержен как рискам со стороны самого актива, так и со стороны обменного курса (Weert, 2008). Произведение  $S_1(T)S_2(T)$  будем называть ценой  $S_3(T)$  соответствующего кросс-актива  $S_3$ , а  $S_1$  и  $S_2$  – его компонентами.

В качестве классических работ, посвященных исследованию данного вопроса и сопряженных с ним проблем, можно привести труды (Derman, Karasinski, Wecker, 1990; Reiner, 1992). В (Derman, Karasinski, Wecker, 1990) авторы рассматривают контракты с гарантированным обменным курсом: форварды и опционы на иностранные активы с выплатой в национальной валюте и не зависящие от обменного курса. Опционы данного вида называются *кванто*. В работе (Reiner, 1992) приводятся четыре стратегии, позволяющие инвестору минимизировать риски инвестиций в иностранный актив, связанные с движением курса валюты, цены иностранного актива или их комбинации. Для каждого случая приводится аналитическое выражение для получения стоимости опциона.

В качестве нестандартного способа оценки экзотических опционов, к которым относится композитный опцион, можно привести ряд подходов, связанных с построением совместной плотности вероятности цен активов, являющихся компонентами кросс-актива. В работе (Breedon, Litzenberger, 1978) впервые было показано, что вторая производная опционной ценовой кривой по цене исполнения будет дисконтированной совместной риск-нейтральной плотностью вероятности цен активов. Дважды интегрируя такую плотность по цене исполнения, получаем интересующую опционную ценовую кривую (Madan, Wang, 2021). Моделирование совместной плотности вероятности цен активов – нетривиальная задача. Для решения описанной проблемы часто используют копула-функции. Так, в работе (Bennett, Kennedy, 2004) для моделирования такой плотности используется нормальная копула-функция, а в работах (Cherubini, Luciano 2002; Taylor, Wang, 2004; Salmon, Schleicher, 2006) предлагается использовать Архимедовы копула-функции.

Одним из ключевых параметров при оценке композитного опциона является корреляция между обменным курсом и стоимостью актива. В случае если для каждой компоненты кросс-актива известны поверхности вмененной волатильности, торговля опционом на кросс-актив эквивалентна торговле корреляцией. В академической литературе (Haug, 1997; Wilmott, 2007) вводится понятие «вмененная корреляция» – корреляция, с помощью которой можно восстановить значение вмененной волатильности кросс-актива.

В исследовательских работах (Walter, Lopez, 2000; Castren, Mazzotta, 2005; Eklund, Estaifo, 2018) приводится ряд методологических подходов, позволяющих рассчитать корреляцию для оценки композитных опционов. Однако все эти подходы предназначены для расчета стационарной корреляции.

Альтернативой стационарному подходу является исследование корреляции как функции от времени, т.е. учет временной структуры корреляции. Хрестоматийным примером служит модель динамических условных корреляций

(DCC GARCH), впервые представленная в работе (Engle, 2002). В DCC GARCH снимаются требования к постоянству коэффициентов попарных корреляций между активами (Нагапетян, 2019), что позволяет получить явное выражение для прогнозирования временной структуры корреляции (Hull, 2003)<sup>1</sup>.

В рамках данной исследовательской работы была поставлена и решена задача оценки стоимости композитного опциона, а также получения поверхности волатильности на неторгуемый кросс-актив при условии наличия и полной доступности информации о компонентах такого кросс-актива. Под неторгуемым кросс-активом подразумевается кросс-актив, который не имеет ликвидного рынка опционов. Наличие ликвидного рынка позволяет получить волатильность, необходимую для оценки опциона, согласованной с рынком, путем анализа рыночных цен и использования различных методов интерполяции и экстраполяции<sup>2</sup>. На неликвидном рынке цены на опционы отсутствуют или их крайне мало, поэтому нет возможности использовать стандартные методы оценки волатильности.

Таким образом, одной из основных задач участников таких рынков является поиск способа справедливой оценки опционов (Chang, Pant, 2003). Под наличием и полной доступностью информации о компонентах кросс-актива подразумевается наличие и доступность информации как о движении цен базовых активов, так и об опционном рынке для данных активов. По сути, такая поверхность волатильности синтезируется из поверхностей вмененных волатильностей активов  $S_1$  и  $S_2$  с учетом знания корреляции между логарифмическими доходностями компонент кросс-актива (далее будем называть такую поверхность синтетической).

Примером практической задачи может быть оценка стоимости опциона с произвольным страйком и произвольной срочностью на нефть марки BRENT, котируемой в рублях, используя доступную информацию о поверхностях волатильностей для нефти марки BRENT, котируемой в долларах США, и валютной паре USDRUB.

В разд. 2 предложен вывод параметрического выражения, позволяющего получить стоимость рассматриваемого опциона. В разд. 3 представлена методология расчета ключевых параметров формулы стоимости композитного опциона – коэффициента корреляции и волатильности кросс-актива. В разд. 4 приведены численные результаты – сравнение исторической корреляции и корреляции, полученной на основе DCC GARCH (1, 1) (DCC-корреляция), сравнение их с вмененной корреляцией. Проиллюстрировано использование методологии расчета композитной волатильности на примере валютной пары EURRUB и USDRUB, осуществлено построение поверхности волатильности для синтетического актива – нефти марки BRENT, номинированной в рублях.

## 2. Ценообразование композитного опциона и «греки»

### 2.1. Логнормальная модель изменения цены актива

Сконструировать кросс-актив  $S_3$  можно двумя способами.

Пусть  $S_1(t)$  – обменный курс иностранной валюты в национальную в момент  $t$ ;  $S_2(t)$  – стоимость иностранного актива  $S_2$  в момент  $t$ . Тогда стоимость кросс-актива  $S_3(t)$  в момент  $t$  представима в виде

$$S_3(t) = S_1(t)S_2(t) \quad (1)$$

<sup>1</sup> См. также “Synthetic volatilities for uncommon currency crosses”. Bloomberg internal document.

<sup>2</sup> [https://www.iasonltd.com/doc/old\\_rps/2007/2013\\_The\\_implied\\_volatility\\_surfaces.pdf](https://www.iasonltd.com/doc/old_rps/2007/2013_The_implied_volatility_surfaces.pdf)

или<sup>3</sup>

$$S_3(t) = S_2(t) / \widetilde{S}_1(t), \quad (2)$$

где  $\widetilde{S}_1(t)$  – обменный курс национальной валюты в иностранную валюту в момент  $t$  (обратный курс).

Положим, что базовые активы  $S_1, \widetilde{S}_1$  и  $S_2$  следуют геометрическому броуновскому движению (Oksendal, 2013). Если цена кросс-актива  $S_3(t)$  определена в виде (1), то справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} &= (r_d - r_f)dt + \sigma_1 dW_t^{S_1, \mathbb{Q}^d}, \quad \frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = (r_f - q)dt + \sigma_2 dW_t^{S_2, \mathbb{Q}^f}, \\ d\langle W_t^{S_1, \mathbb{Q}^d}, W_t^{S_2, \mathbb{Q}^f} \rangle &= \rho_{S_1, S_2} dt = \rho dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r_d$  – безрисковая процентная ставка национальной валюты, или внутренняя безрисковая процентная ставка;  $r_f$  – безрисковая процентная ставка иностранной валюты, или внешняя безрисковая процентная ставка;  $\sigma_1$  – волатильность обменного курса  $S_1$ ;  $\sigma_2$  – волатильность цены иностранного актива  $S_2$ ;  $q$  – доходность актива  $S_2$ ;  $\rho$  – коэффициент корреляции между  $W_t^{S_1, \mathbb{Q}^d}$  и  $W_t^{S_2, \mathbb{Q}^f}$ ;  $W_t^{S_1, \mathbb{Q}^d}$  – броуновский процесс в национальной риск-нейтральной мере;  $W_t^{S_2, \mathbb{Q}^f}$  – броуновский процесс в иностранной риск-нейтральной мере. Используя теорему Гирсанова (Björk, 2009), переведем  $S_2(t)$  в национальную риск-нейтральную меру  $\mathbb{Q}^d$ :

$$\frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = (r_f - q - \rho\sigma_1\sigma_2)dt + \sigma_2 dW_t^{S_2, \mathbb{Q}^d}. \quad (4)$$

Применяя лемму Ито (Björk, 2009) относительно  $\ln S_1(t)$  и  $\ln S_2(t)$ , получаем выражения для  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_1(0) \exp\left\{(r_d - r_f - \sigma_1^2 / 2)t + \sigma_1 W_t^{S_1, \mathbb{Q}^d}\right\}, \\ S_2(t) &= S_2(0) \exp\left\{(r_f - q - \rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2 / 2)t + \sigma_2 W_t^{S_2, \mathbb{Q}^d}\right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти формулы будут использованы далее для вывода выражения, позволяющего оценить стоимость композитного опциона.

### 2.3. Формула стоимости композитного опциона

Рассмотрим европейский колл-опцион с платежной функцией вида

$$f(T) = \max(0, S_1(T)S_2(T) - K), \quad (6)$$

где  $T$  – момент истечения опциона;  $K$  – цена исполнения. В соответствии с первой фундаментальной теоремой ценообразования активов (Pulido, 2014) стоимость опциона в момент  $t$  (где  $t \leq T$ ) определяется соотношением:

$$C(t) = e^{-r_d(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^d} [f(T)], \quad (7)$$

где  $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^d}$  – математическое ожидание относительно внутренней риск-нейтральной меры. Из соотношений (5) следует, что  $S_1$  и  $S_2$  в момент времени  $T$  представимы в виде<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} S_1(T) &= S_1(0) \exp\left\{(r_d - r_f - \sigma_1^2 / 2)T + \sigma_1 \xi_1 \sqrt{T}\right\}, \\ S_2(T) &= S_2(0) \exp\left\{(r_f - q - \rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2 / 2)T + \sigma_2 \xi_2 \sqrt{T}\right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2)'$  – случайный вектор, распределенный нормально с плотностью

<sup>3</sup> Продемонстрированный далее анализ производился в предположении, что кросс-актив  $S_3$  представим в виде (1). Основные выводы для случая, когда кросс-актив представим в виде (2), вынесены в Приложение.

<sup>4</sup> Далее будем полагать, что  $t = 0$ , т.е. соответствует моменту «сегодня». Следовательно, время до истечения опциона  $T - t = T$ .

вероятности

$$\varphi_{\xi}(x, \Sigma) = \left(2\pi\sqrt{\det\Sigma}\right)^{-1} e^{-x'\Sigma^{-1}x/2}, \quad (9)$$

при этом  $x = (x_1, x_2)'$ ,  $\Sigma$  – симметричная и положительно определенная матрица –

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$\rho$  – коэффициент корреляции между  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Представление (8) эквивалентно записи

$$S_1(T) = F_1(T) \exp\{-0,5\sigma_1^2 T + \sigma_1 \xi_1 \sqrt{T}\}, \quad (11)$$

$$S_2(T) = F_2(T) \exp\left\{\left(-\rho\sigma_1\sigma_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T + \sigma_2 \xi_2 \sqrt{T}\right\},$$

в которой  $F_1(T) = S_1(0)\exp\{(r_d - r_f)T\}$  – форвардная цена  $S_1$  в момент  $T$  и  $F_2(T) = S_2(0)\exp\{(r_f - q)T\}$  – форвардная цена  $S_2$  в момент  $T$ .

В соответствии с этими формулами математическое ожидание платежной функции  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}[f(T)]$  представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}[f(T)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(0, S_1(T)S_2(T) - K) \varphi_{\xi}(x, \Sigma) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{\Omega_0} \left( F_1(T) \exp\{-0,5\sigma_1^2 T + \sigma_1 x_1 \sqrt{T}\} F_2(T) \exp\{-0,5\sigma_2^2 T - \rho\sigma_1\sigma_2 T + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2 x_2 \sqrt{T}\} - K \right) \varphi_{\xi}(x, \Sigma) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\Omega_0 = x_1, x_2 : F_1(T)F_2(T) \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2 T}{2} + \sigma_1 x_1 \sqrt{T}\right\} \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2 T}{2} - \rho\sigma_1\sigma_2 T + \sigma_2 x_2 \sqrt{T}\right\} \geq K. \quad (13)$$

Преобразуем (13) к виду

$$\Omega_0 = x_1, x_2 : \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 \geq \left( \ln \frac{K}{F_1(T)F_2(T)} + \frac{\sigma_3^2 T}{2} \right) / \sqrt{T} \quad (14)$$

при  $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$ .

Заметим, что в подынтегральном выражении присутствует произведение двух экспонент. Тогда сумма показателей следует нормальному распределению и задача сводится к вычислению одномерного интеграла. Действительно, рассмотрим произведение  $S_1(T)S_2(T)$ :

$$\begin{aligned} S_1(T)S_2(T) &= F_1(T) \exp\{-0,5\sigma_1^2 T + \sigma_1 \xi_1 \sqrt{T}\} F_2(T) \exp\{-0,5\sigma_2^2 T - \rho\sigma_1\sigma_2 T + \\ &\quad + \sigma_2 \xi_2 \sqrt{T}\} = F_1(T)F_2(T) \exp\{-0,5\sigma_3^2 T + \sigma_3 \xi_3 \sqrt{T}\}, \end{aligned} \quad (15)$$

когда  $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$  и  $\xi_3$  распределено по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Отсюда следует, что задача по оценке опциона  $C = \exp\{-r_d T\} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}[f(T)]$  сводится к вычислению одномерного интеграла

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}[f(T)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega_0} \left( F_1(T)F_2(T) \exp\{-0,5\sigma_3^2 T + \sigma_3 y \sqrt{T}\} - K \right) \exp\{-0,5y^2\} dy, \quad (16)$$

где

$$\Omega_0 = y : \sigma_3 y \geq \left\{ \ln \frac{K}{F_1(T)F_2(T)} + 0,5\sigma_3^2 T \right\} / \sqrt{T}. \quad (17)$$

Воспользовавшись свойством линейности интеграла в выражении (16), получаем разность двух одномерных интегралов, каждый из которых выражается через интегральную функцию нормального распределения. Таким образом, имеем

$$\mathbb{E}^{Q^d} [f(T)] = F_1(T)F_2(T)N(d_1) - KN(d_2), \quad (18)$$

при этом

$$d_1 = \left( \ln \frac{F_1 F_2}{K} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 T \right) / (\sigma_3 \sqrt{T}), \quad d_2 = d_1 - \sigma_3 \sqrt{T},$$

$N(d)$  – интегральная функция стандартного нормального распределения вида

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du. \quad (19)$$

Выражение (18) позволяет сформулировать следующее следствие<sup>5</sup>.

**Следствие 1.** Стоимость европейского композитного опциона  $V$  на кросс-актив  $S_3$ , в случае когда  $S_3(T) = S_1(T)S_2(T)$ , где  $S_1(T)$  – обменный курс иностранной валюты в национальную в момент времени  $T$ ;  $S_2(T)$  – стоимость иностранного актива  $S_2$  в момент времени  $T$ ;  $T$  – момент истечения опциона, вычисляется по формуле:

$$V = e^{-r_d T} (\phi F_1(T)F_2(T)N(\phi d_1) - \phi K N(\phi d_2)), \quad (20)$$

где  $\phi = 1$  для колл-опциона и  $\phi = -1$  для пут-опциона,

$$d_2 = d_1 - \sigma_3 \sqrt{T}, \quad \sigma_3^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2, \quad F_1(T) = S_1(0)\exp\{(r_d - r_f)T\},$$

$$F_2(T) = S_2(0)\exp\{(r_f - q)T\},$$

$r_d$  – внутренняя безрисковая процентная ставка;  $r_f$  – внешняя безрисковая процентная ставка;  $\sigma_1$  – волатильность обменного курса  $S_1$ ;  $\sigma_2$  – волатильность цены иностранного актива  $S_2$ ;  $q$  – доходность актива  $S_2$ ;  $\rho$  – коэффициент корреляции между логарифмическими доходностями цен  $S_1$  и  $S_2$ ;  $N(d)$  – интегральная функция стандартного нормального распределения.

Формула (20) согласуется с выражениями, приведенными в классических работах (Reiner, 1992; Haug, 2007).

Отметим, что волатильность кросс-актива  $\sigma_3$  определяется из выражения

$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2, \quad (21)$$

если кросс-актив  $S_3$  представим в виде (1) и

$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 - 2\tilde{\rho}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - \quad (22)$$

в случае когда  $S_3$  – в виде (2). Далее волатильность кросс-актива, полученную из формул (21) и (22), будем также называть синтетической волатильностью кросс-актива.

#### 2.4. «Греки»

Наиболее распространенными метриками чувствительностей цены дериватива к его базовым параметрам являются:  $\Delta$  – скорость изменения теоретической стоимости опциона по отношению к изменению стоимости базового актива;  $\Gamma$  – скорость изменения дельты по отношению к изменению стоимости базового актива;  $\Theta$  – скорость изменения стоимости опциона с течением времени;  $\rho$  – чувствительность стоимости опциона к изменению внутренней процентной ставки;  $Vega$  – скорость изменения цены опциона по отношению к изменению волатильности базового актива. Эти величины обычно обозначаются греческими буквами и называются «греками». В случае если в качестве дерива-

<sup>5</sup> В случае если кросс-актив  $S_3$  представим в виде (2), следуют аналогичные рассуждения с точностью до замены вида:  $S_1(t) = 1 / \tilde{S}_1(t)$  и  $\tilde{\rho} = -\rho$ .

Таблица 1

Частные производные стоимости композитного опциона («греки»)<sup>6</sup>

«Греки»	Опционы-колл	Опционы-пут
$\Delta$	$e^{-qT} N(d_1)$	$-e^{-qT} N(-d_1)$
$\Gamma$	$e^{-qT} N'(d_1) / (S_3(0)\sigma_3\sqrt{T})$	$e^{-qT} N'(d_1) / (S_3(0)\sigma_3\sqrt{T})$
$\Theta$	$qS_3(0)N(d_1)e^{-qT} - r_d K e^{-r_d T} N(d_2) -$ $-S_3(0)e^{-qT} N'(d_1)\sigma_3 / 2\sqrt{T}$	$-qS_3(0)N(-d_1)e^{-qT} + r_d K e^{-r_d T} N(-d_2) -$ $-S_3(0)e^{-qT} N'(d_1)\sigma_3 / 2\sqrt{T}$
<i>Vega</i>	$S_3(0)e^{-qT} \sqrt{T} N'(d_1)$	$S_3(0)e^{-qT} \sqrt{T} N'(d_1)$
$\rho$	$KT e^{-r_d T} N'(d_2)$	$-KT e^{-r_d T} N'(-d_2)$
$\partial_{\sigma_1}$	$\frac{(\sigma_2 \pm \rho\sigma_1)\sqrt{T}}{\sigma_3} S_3(0)e^{-qT} N'(d_1)$	$\frac{(\sigma_1 \pm \rho\sigma_2)\sqrt{T}}{\sigma_3} S_3(0)e^{-qT} N'(d_1)$
$\partial_{\sigma_2}$	$\frac{(\sigma_2 \pm \rho\sigma_1)\sqrt{T}}{\sigma_3} S_3(0)e^{-qT} N'(d_1)$	$\frac{(\sigma_2 \pm \rho\sigma_1)\sqrt{T}}{\sigma_3} S_3(0)e^{-qT} N'(d_1)$
$\partial_\rho$	$\pm \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{T}}{\sigma_3} S_3(0)e^{-qT} N'(d_1)$	$\pm \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{T}}{\sigma_3} S_3(0)e^{-qT} N'(d_1)$

Источник: оценки авторов.

тива выступает европейский композитный опцион, «греки» однозначно определяются из формул, приведенных в следствиях 1–2.

В табл. 1 приведены явные выражения для определения значений коэффициентов чувствительностей европейского композитного опциона. Выбор знака в формулах для определения коэффициентов  $\partial_{\sigma_1}$ ,  $\partial_{\sigma_2}$ ,  $\partial_\rho$  зависит от того, каким образом сконструирован кросс-актив, если кросс-актив представляется в виде (1), то в формулах для  $\partial_{\sigma_1}$ ,  $\partial_{\sigma_2}$ ,  $\partial_\rho$  присутствует «плюс», иначе – «минус».

### 3. Оценка параметров модели

Для построения поверхности волатильности кросс-актива необходимо определить вмененную волатильность каждого актива, участвующего в его конструировании, а также коэффициент корреляции между данными активами. Положим, что для каждого из двух активов известна его поверхность вмененной волатильности. В дальнейшем также будем придерживаться следующей терминологии:

– денежность – отношение цены исполнения  $K$  опциона к форвардной цене  $F(T)$  базового актива:

$$k = K / F(T); \tag{23}$$

– страйк «на деньгах» (АТМ) – цена исполнения, совпадающая с форвардной ценой  $F(T)$  базового актива, что эквивалентно страйку дельта-нейтрального стреддла. Таким образом, опцион находится «на деньгах» при  $k = 1$ ;

<sup>6</sup> В табл. 1 используется выражение для производной интегральной функции стандартного нормального распределения:  
 $N'(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-z^2 / 2\}$ .

– ITM и OTM – состояния опционов-колл «в деньгах» и «вне денег» соответственно. Так, колл-опцион находится «в деньгах» при денежности  $k < 1$  и «вне денег» при  $k > 1$ .

### 3.1. Коэффициент корреляции

Существует множество подходов (Walter, Lopez, 2000; Castren, Mazzotta, 2005; Eklund, Estaifo, 2018)<sup>7</sup>, позволяющих оценить корреляцию. Ниже представлены некоторые из них.

#### 3.1.1. Оценка корреляции на основании исторических данных

Под исторической корреляцией будем подразумевать коэффициент корреляции Пирсона:

$$\rho = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}, \quad (24)$$

где  $X$  и  $Y$  – дневные логарифмические доходности базовых активов;  $\text{Cov}(X, Y)$  – ковариация между  $X$  и  $Y$ ;  $\text{Var}(X)$  – дисперсия  $X$  и  $\text{Var}(Y)$  – дисперсия  $Y$ .

#### 3.1.2. Оценка вмененной корреляции

На примере того как для волатильности вводится понятия «историческая» и «вмененная», справедливо будет и для коэффициента корреляции ввести аналогичные понятия. Под вмененной корреляцией подразумевается корреляция, подставляя значение которой в (21) или (22) для нахождения волатильности кросс-актива можно получить вмененную волатильность кросс-актива.

В случае если известна подразумеваемая волатильность кросс-актива на ATM-страйке, то вмененную корреляцию можно вычислить явно. В случае если цена кросс-актива  $S_3$  представима в виде произведения (1), вмененная корреляция вычисляется по формуле

$$\rho_{product}^{impl} = \frac{(\sigma_{3,ATM}^2 - \sigma_{1,ATM}^2 - \sigma_{2,ATM}^2)}{2\sigma_{1,ATM}\sigma_{2,ATM}}, \quad (25)$$

если цена кросс-актива  $S_3$  представима в виде отношения (2), вмененная корреляция вычисляется по формуле

$$\rho_{quotient}^{impl} = -\frac{(\sigma_{3,ATM}^2 - \sigma_{1,ATM}^2 - \sigma_{2,ATM}^2)}{2\sigma_{1,ATM}\sigma_{2,ATM}}, \quad (26)$$

где  $\rho_{product}^{impl}$  – вмененная корреляция в случае произведения активов,  $\rho_{quotient}^{impl}$  – вмененная корреляция в случае отношения активов,  $\sigma_{1,ATM}$  – вмененная волатильность на ATM-страйке актива  $S_1$  в случае (25) и  $\tilde{S}_1$  в случае (26),  $\sigma_{2,ATM}$  – вмененная волатильность актива  $S_2$  на ATM-страйке,  $\sigma_{3,ATM}$  – вмененная волатильность кросс-актива  $S_3$  на ATM-страйке.

#### 3.1.3. Оценка корреляции при помощи модели DCC-GARCH (1, 1)

Модель DCC-GARCH впервые была предложена в работе (Engle, 2002). Процедура построения динамической корреляции состоит из двух этапов. На первом шаге формируются остатки одномерных GARCH-моделей. На втором шаге производится моделирование динамики DCC с последующим восстановлением временной структуры корреляции и ковариационной матрицы.

Рассмотрим применение DCC-модели в двумерном случае. Тогда модель явно описывается выражениями (Engle, 2002):

$$r_\tau | \mathcal{F}_{\tau-1} \sim N(0, D_\tau R_\tau D_\tau), \quad \varepsilon_\tau = D_\tau^{-1} r_\tau, Q_\tau = \bar{Q}(1 - \alpha - \beta) + \alpha \varepsilon'_{\tau-1} \varepsilon_{\tau-1} + \beta Q_{\tau-1}, \quad (27)$$

$$R_\tau = (\text{diag}(Q_\tau))^{-1/2} Q_\tau (\text{diag}(Q_\tau))^{-1/2}, \quad \bar{Q} = \frac{1}{n} \int_{\tau=1}^n \varepsilon_\tau \varepsilon'_\tau,$$

<sup>7</sup> См. также “Synthetic volatilities for uncommon currency crosses”. Bloomberg internal document.



где  $\tilde{J}_{\tau-1}$  – вся информация, доступная на момент  $\tau-1$ ;  $Q_{\tau}$  – ковариационная матрица;  $D_{\tau}$  – диагональная матрица условных стандартных отклонений, которые могут быть определены с помощью одномерной GARCH-модели;  $R_{\tau}$  – матрица выборочной корреляции между стандартизированными остатками;  $\varepsilon_{\tau}$  – стандартизированные остатки в момент времени  $\tau$ ;  $\bar{Q}$  – безусловная ковариационная матрица стандартизированных остатков;  $\alpha, \beta$  – параметры модели ( $\alpha, \beta > 0$  и  $\alpha + \beta < 1$ ). Условия, накладываемые на параметры  $\alpha, \beta$ , гарантируют положительную определенность корреляционной матрицы.

Элемент  $\rho_{ij, \tau}$  корреляционной матрицы в момент времени  $\tau$  определяется по формуле

$$\rho_{ij, \tau} = q_{ij, \tau} / \sqrt{q_{ii, \tau} q_{jj, \tau}}, \quad (28)$$

где  $q_{ij}$  – элемент ковариационной матрицы  $Q_{\tau}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Как и у других моделей семейства GARCH, неизвестные параметры  $\alpha, \beta$  оцениваются через максимизацию логарифма функции правдоподобия, основываясь на предположении о нормальном распределении остатков<sup>8</sup>. В таком случае логарифм функции правдоподобия  $LL$  представим в виде

$$LL = -\frac{1}{2} \int_{\tau=1}^T \left( n \ln(2\pi) + 2 \ln |D_{\tau}| + r'_{\tau} D_{\tau}^{-1} D_{\tau}^{-1} r_{\tau} - \varepsilon'_{\tau} \varepsilon_{\tau} + \ln |R_{\tau}| + \varepsilon'_{\tau} R_{\tau} \varepsilon_{\tau} \right). \quad (29)$$

Оценив параметры модели  $\alpha$  и  $\beta$ , можно получить значение коэффициента корреляции на день  $\tau + u$  в виде выражения

$$\rho(u) = \bar{\rho} + \bar{\rho} \left( \rho_0 - \bar{\rho} \right) e^{-(1-\alpha-\beta)u}, \quad (30)$$

где  $\bar{\rho} = \bar{q}_{12} / \bar{q}_{12}$  – элемент матрицы  $\bar{Q}$ ;  $\rho_0$  – корреляция на момент расчета  $\tau^9$ .

### 3.2. Волатильность кросс-актива

Рассмотрим задачу определения синтетической волатильности кросс-актива  $S_3$  на денежность  $k_3 = 1,05$ , когда  $S_3$  представим в виде (1). Ввиду того что денежность кросс-актива, номинированного в национальной валюте, также представима в виде произведения денежностей активов-компонентов, имеем, что  $k_3 = k_1 k_2 = 1,05$ , где  $k_1$  и  $k_2$  – денежности активов-компонентов  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, принадлежат промежутку  $[0, +\infty)$ . Число таких комбинаций  $k_1$  и  $k_2$ , что  $k_1 k_2 = 1,05$ , несчетно. Следовательно, необходимо определить механизм, позволяющий корректно выбрать  $k_1$  и  $k_2$ .

Будем фиксировать денежности следующим образом:  $k_3 = k_{low, ATM} k_{high} = k_{high}$ , где  $k_{low, ATM} = 1$  – денежность опциона с истечением в момент  $T$  на менее рисковый актив, а  $k_{high}$  – денежность опциона с истечением в момент  $T$  на более рисковый актив. Здесь и далее будем называть более рисковым активом тот актив, у которого вмененная волатильность опциона с ATM-страйком и с моментом истечения  $T$  больше<sup>10</sup>. Для менее рискового актива вмененная волатильность  $\sigma_{low, ATM}$  берется в точке  $k_{low, ATM} = 1$ . Для более рискового актива волатильность  $\sigma_{high}$  взята при такой денежности, при которой получается необходимая денежность  $k_3$ . Таким образом, получаем, что волатильность кросс-актива представима в виде

$$\sigma_3^2(T) = \sigma_{low, ATM}^2(T) + \sigma_{high}^2(T) + 2\rho \sigma_{low, ATM}(T) \sigma_{high}(T), \quad (31)$$

<sup>8</sup> Без данного предположения оценка, полученная с помощью максимизации логарифма функции квазиравдоподобия, также будет являться состоятельной (Engle, 2002).

<sup>9</sup> См. "Synthetic volatilities for uncommon currency crosses". Bloomberg internal document.

<sup>10</sup> В случае построения кривой волатильности для набора срочностей такая методология не подходит, так как более рискованными могут оказаться разные активы. В таком случае более рисковым активом (менее рисковым активом) можно считать такой, у которого среднее значение волатильности, посчитанное на ATM-страйках и на всем доступном наборе срочностей, больше (меньше).

где  $\rho$  – коэффициент корреляции между логарифмическими доходностями цен менее рискового и более рискового активов;  $\sigma_{low,ATM}(T)$  – вмененная волатильность опциона с истечением в момент  $T$  в АТМ-страйке на менее рисковый актив;  $\sigma_{high}(T)$  – вмененная волатильность опциона с истечением в момент  $T$  в денежно-сти  $k_{high}$  на более рисковый актив.

Аналогично, в случае если  $S_3$  представим в виде (2), справедливо выражение

$$\sigma_3^2(T) = \sigma_{low,ATM}^2(T) + \sigma_{high}^2(T) - 2\tilde{\rho}\sigma_{low,ATM}(T)\sigma_{high}(T), \quad (32)$$

где  $\tilde{\rho}$  – коэффициент корреляции между логарифмическими доходностями менее рискового и более рискового активов;  $\sigma_{low,ATM}(T)$  – вмененная волатильность опциона с истечением в момент  $T$  в АТМ-страйке на менее рисковый актив;  $\sigma_{high}(T)$  – вмененная волатильность опциона с истечением в момент  $T$  в денежно-сти  $k_{high}$  на более рисковый актив.

#### 4. Численные результаты

Основной задачей настоящей работы является оценка композитного опциона на неторгуемый кросс-актив при условии наличия и полной доступности информации о компонентах данного кросс-актива. Напомним, что рамках настоящей статьи кросс-актив называется неторгуемым, если для него отсутствует ликвидный опционный рынок. Примером такого кросс-актива может быть нефть марки Brent, выраженная в рублях (*BRENTRUB*).

Для того чтобы практически оценить качество предложенных в разд. 3 подходов, в п. 4.1–4.3 настоящей работы будет рассмотрен кросс-актив с доступным ликвидным опционным рынком. В этом случае появляется возможность сравнить подходы пп. 3.1.1 и 3.1.3 к оценке корреляции, которые получают только на основе наблюдаемых рыночных данных цен базовых активов, с вмененной корреляцией, которая фактически закладывается на доступном рынке опционов. В свою очередь, знание вмененной корреляции позволяет сравнить кривые синтетической волатильности, полученные с помощью различных методологий, с кривой вмененной волатильности и оценить корректность выбора волатильностей активов-компонентов в соответствии с предложенными методологиями.

К оценке качества синтетической волатильности будем подходить с эмпирической точки зрения: если кривая синтетической волатильности попадает в спред волатильности спроса и предложения, будем считать, что такая кривая находится в области практического применения и может быть использована для оценки композитного опциона<sup>11</sup>.

Под волатильностью спроса (предложения) будем понимать волатильность, подставив которую в формулу (20), получим цену спроса (предложения) опциона. Разницу между ценой предложения и ценой спроса будем называть ценовым спредом. Аналогично, разница между волатильностью предложения и волатильностью спроса – спред волатильности. В зависимости от конъюнктуры рынка и ликвидности спред волатильности при фиксированном страйке может со временем как сужаться, так и расширяться. Обычно наиболее ликвидной областью является АТМ-страйк и его окрестность, при продвижении в область ОТМ или ИТМ ликвидность падает, а спред растёт.

<sup>11</sup> Введение данной метрики качества связано со спецификой рассматриваемого нами класса неторгуемых кросс-активов. Действительно, если вы являетесь единственным или практически единственным поставщиком ликвидности на рынке, регулируя спред волатильности спроса и предложения, можно управлять премией, в которую включены риски, связанные с будущей позицией по купленному (проданному) опциону.

В п. 4.4 приводится пример построения поверхности волатильности для неторгуемого актива *BRENT*RUB.

#### 4.1. Сравнение подходов оценки коэффициента корреляции

Продemonстрируем результаты оценки исторической и DCC-корреляции в соответствии с методиками, приведенными в разд. 3. Полученные данные сравним со значениями вмененной корреляции, взятыми из Bloomberg.

В первую очередь проведем сравнение способов оценки корреляции (рис. 1, 2). Построение модели DCC-GARCH (1, 1) было реализовано в R при помощи пакета «*rmgarch*» (Galanos, 2022). Оценка параметров модели DCC проводилась на данных логарифмических приращений цен закрытия дня на промежутке в два года. Переоценка параметров модели DCC происходила ежедневно с последующей подстановкой новых параметров в формулу (30). Для расчета двухмесячной (2M) и годовой (1Y) исторических корреляций были взяты данные за 44 и 252 рабочих дня соответственно. На рис. 1–2 приведен ежедневный расчет исторической корреляции (кривые *Historical*) между логарифмическими приращениями *USDRUB* и *EURUSD* за 44 и 252 дня соответственно в период с 01.01.2019 до 31.12.2021.

Вмененная корреляция (кривые *Implied*) рассчитывается Bloomberg на основании формул (25) и (26), где в качестве кросс-актива выступает валютная пара *EURRUB*, а *USDRUB* и *EURUSD* – активы-компоненты. Графики на рис. 1 и 2 демонстрируют, что вмененная корреляция имеет слабые осцилляции относительно окрестностей значений  $-0,3$  и  $-0,25$  соответственно. В свою очередь, краткосрочная историческая корреляция (44 дня) испытывает сильные колебания, периодически пересекая кривую вмененной корреляции. При этом DCC-корреляция, полученная по формуле (30), также слабо осциллирует и находится в окрестностях вмененной корреляции. На графиках также наблюдаются

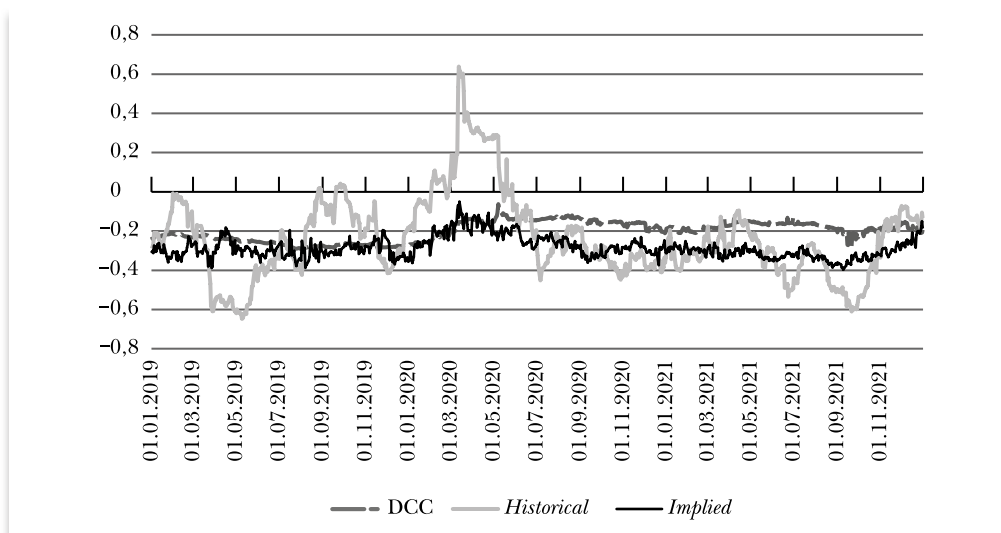
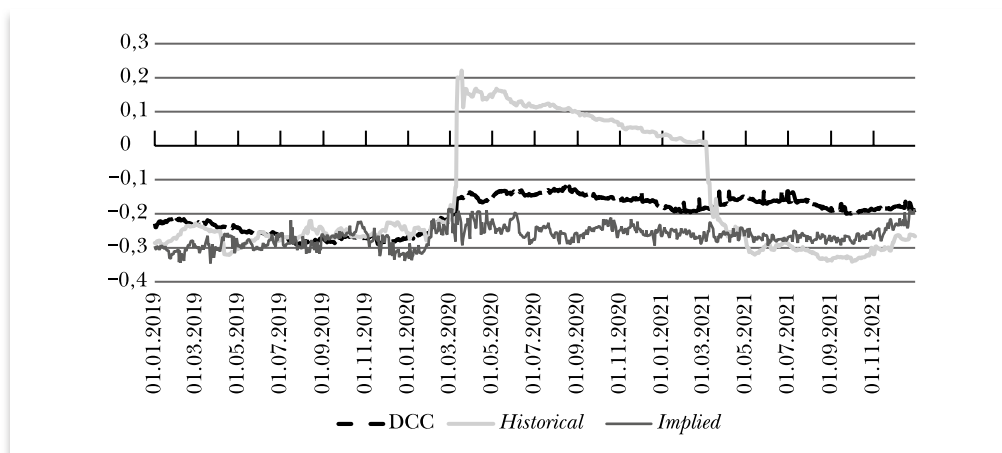


Рис. 1

Двухмесячная корреляция между *EURUSD* и *USDRUB*, полученная в соответствии с методиками из разд. 3

**Рис. 2**

Годовая корреляция между *EURUSD* и *USDRUB*, полученная в соответствии с методиками из разд. 3

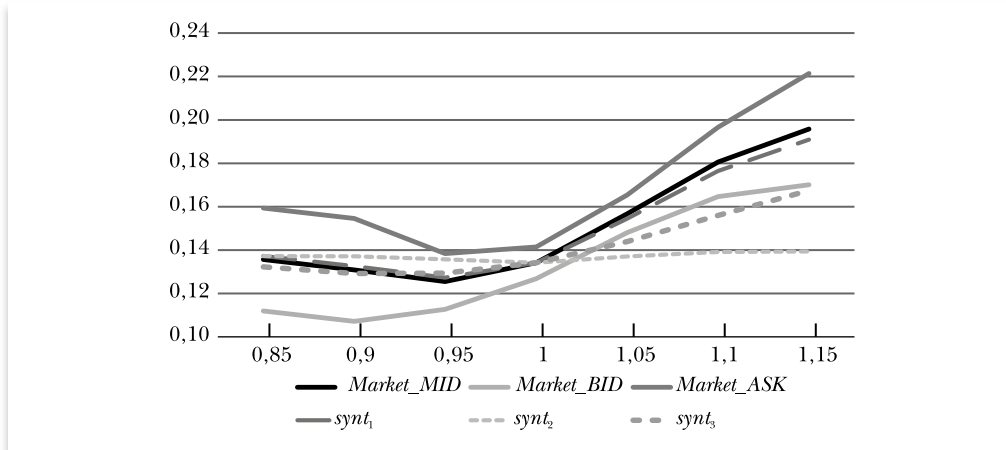
структурные сдвиги, связанные с пандемией COVID-19. Расхождения между исторической и вмененной корреляциями в такие периоды максимальные.

На практике вероятнее всего волатильность кросс-актива на АТМ-страйке неизвестна. Таким образом, вычисление вмененной корреляции из пп. 3.1.2 не представляется возможным. В таком случае для расчета волатильности кросс-актива по формуле (31) можно использовать как историческую корреляцию из пп. 3.1.1, так и корреляцию, полученную с помощью модели DCC GARCH (1, 1) и описанную в пп. 3.1.3. В периоды структурных изменений поведения цены более предпочтительна корреляция, полученная с помощью модели DCC GARCH (1, 1), в силу устойчивости к таким изменениям.

#### 4.2. Восстановление формы кривой вмененной волатильности

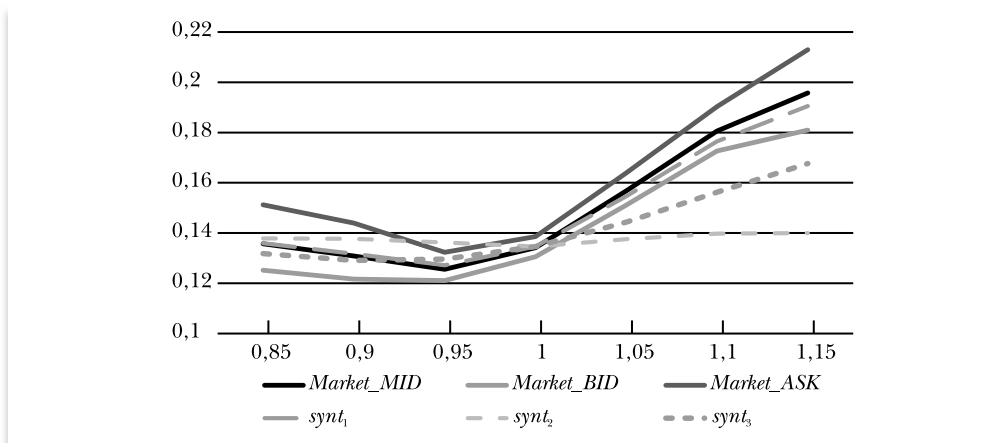
Волатильность кросс-актива (формулы (21) и (22)) зависит от параметров: волатильности активов-компонентов и коэффициента корреляции. Зафиксируем один из параметров – коэффициент корреляции и попробуем подобрать волатильности так, чтобы получить кривую, наиболее близкую к кривой вмененной волатильности. Для этого рассмотрим кросс-активы, для которых доступна информация как о компонентах кросс-актива, так и о самом кросс-активе. При таком рассмотрении появляется возможность найти вмененную корреляцию по формуле (25) или (26) и использовать ее для расчета волатильности кросс-актива по формуле (21) или (22). Далее полученную синтетическую волатильность сравним с вмененной волатильностью кросс-актива.

В качестве активов были выбраны валютные пары  $EURRUB = EURUSD \times USDRUB$  и  $USDRUB = EURUSD / EURRUB$ . Для расчета вмененной корреляции по формуле (25) или (26), синтетической волатильности – по (31) или (32) и построения кривой вмененной волатильности были взяты значения вмененных волатильностей *EURRUB*, *USDRUB*, *EURUSD* из Bloomberg за 01.07.2020. На рис. 3 и 4 представлены графики кривых волатильностей *EURRUB* и *USDRUB* для  $T = 2M$ , полученные следующими способами.



**Рис. 3**

Графики волатильности EURRUB, полученные при  $T = 2M$  за 01.07.2020



**Рис. 4**

Графики волатильности USDRUB, полученные при  $T = 2M$  за 01.07.2020

1. *Market\_MID* — кривая вмененной волатильности рассматриваемого кросс-актива. Кривые вмененной волатильности *Market\_BID* и *Market\_ASK* построены с учетом спреда волатильности, полученного из Bloomberg. Кривые *Market\_MID*, *Market\_BID* и *Market\_ASK* связаны следующим соотношением:

$$Market\_MID = (Market\_BID + Market\_ASK) / 2. \quad (33)$$

2. Кривая синтетической волатильности  $syn_1$  рассчитывается с помощью формул (31) или (32) с использованием вмененной корреляции ((25) или (26)) и в соответствии с методологией из п. 3.2: на ATM-страйке фиксируется волатильность менее рискованного актива (*EURUSD*) и варьирует волатильность более рискованного актива (*USDRUB*, *EURRUB*).

3. Кривая синтетической волатильности  $syn_2$  рассчитывается с помощью (21) или (22) с использованием вмененной корреляции ((25) или (26)) и в соответствии с обратной методологией из п. 3.2: на ATM-страйке фиксиру-

ется волатильность более рискового актива ( $USDRUB$ ,  $EURRUB$ ) и варьируется волатильность менее рискового актива ( $EURUSD$ ).

4. Кривая синтетической волатильности  $synt_3$  рассчитывается с помощью формулы (21) или (22) с использованием вмененной корреляции ((25) или (26)) в соответствии со следующей методологией: волатильности активов-компонентов берутся с одинаковой денежностью, которая определяется как корень из денежности кросс-актива. Например, мы хотим рассчитать волатильность кросс-актива на денежность 1,05, тогда волатильности активов-компонентов берутся с денежностью  $\sqrt{1,05}$ . Корреляции, используемые в расчетах, указаны в табл. 2. Волатильности вычислены на интервале денежностей от 0,85 до 1,15.

На рис. 3 и 4 видно, что значения волатильности с кривых  $synt_1$ ,  $synt_2$ ,  $synt_3$  и  $Market\_MID$  на денежности  $k = 1$  совпадают, что и следует ожидать, так как для расчета используется вмененная корреляция. График кривой  $synt_1$  практически совпадает с  $Market\_MID$  и лежит точно между кривой спроса и предложения. При этом график  $synt_2$  имеет отличную от  $synt_1$ , практически плоскую, форму. Левая часть, находящаяся в области ITM, частично попадает в спред волатильности, однако в области OTM кривая лежит ниже  $Market\_MID$ , т.е. не попадает в спред волатильности. Аналогичное поведение мы наблюдаем и для  $synt_3$ .

На рис. 5 и 6 представлены аналогичные графики для  $T = 1Y$ . Волатильности посчитаны на интервале денежностей от 0,7 до 1,3. Выводы, которые можно сделать, анализируя рис. 5 и 6, в целом повторяют ранее описанное для рис. 3 и 4.

Таблица 2

Корреляция, рассчитанная на 01.07.2020 по формулам (25) и (26)

$T$	2M	1Y
$\rho_{EURRUB}^{impl}$	-0,2619	-0,2775
$\rho_{USDRUB}^{impl}$	0,2502	0,2564

Источник: оценки авторов.

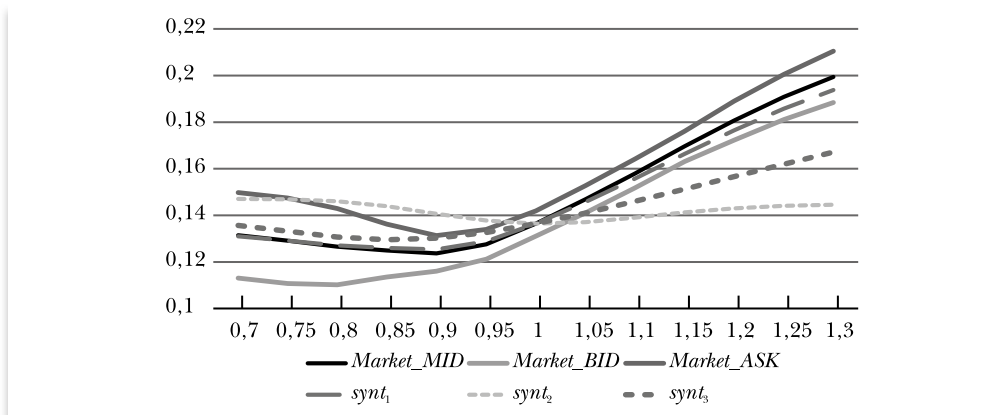


Рис. 5

Графики волатильности  $EURRUB$ , полученные при  $T = 1Y$  за 01.07.2020

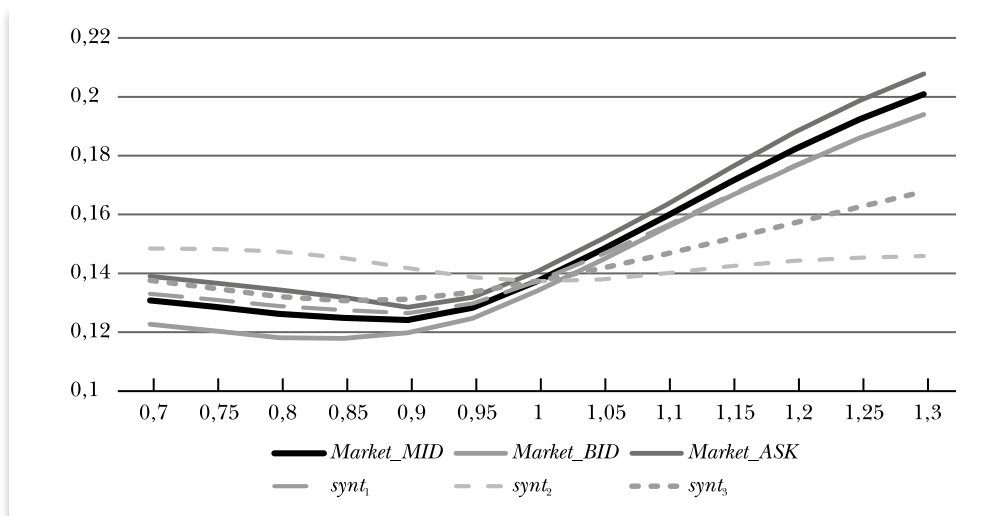


Рис. 6

Графики волатильности *USDRUB*, полученные при  $T = 1Y$  за 01.07.2020

Таким образом, графики кривых  $synt_1$  во всех рассматриваемых случаях попадают в спред волатильности, т.е. находятся в области практического применения и являются наиболее близкими к наблюдаемым рыночным кривым вмененных волатильностей *Market\_MID* для *EURRUB* и *USDRUB*, что свидетельствует о корректности методологии, изложенной в п. 3.2.

#### 4.3. Влияние коэффициента корреляции на оценку волатильности кросс-актива

В предыдущем пункте использовалась информация о значении вмененной корреляции, которая фактически закладывается на доступном рынке опционов. Вмененная корреляция – мнение рынка, которое относится к будущему; оценки корреляции, основанные на ретроспективных данных, – к прошлому. Соответственно, ожидать совпадения этих величин не стоит. Рассматривая неторгуемый кросс-актив, мы можем опираться исключительно на оценки корреляции, которые получаются на основе ретроспективных данных цен базовых активов. В таком случае есть смысл расширить спред волатильности в окрестности АТМ-страйка и тем самым смягчить требования к качеству кривых синтетической волатильности, полученных с помощью пп. 3.1.1 и 3.1.3.

На примере *EURRUB*, рассмотренном в п. 4.2, продемонстрируем, как влияет выбор коэффициента корреляции на построение кривой синтетической волатильности. Расчет синтетической волатильности кросс-актива будем осуществлять в соответствии с методологией из п. 3.2. Для расчета синтетических волатильностей по формуле (31) и построения кривой *Market\_MID* были взяты значения вмененных волатильностей *EURRUB*, *USDRUB*, *EURUSD* из Bloomberg за 01.07.2020. На рис. 7 представлены графики кривых волатильностей *EURRUB* для  $T = 2M$ , полученные следующими способами.

1. *Market\_MID* – кривая вмененной волатильности *EURRUB*. Кривые вмененной волатильности *Market\_BID* и *Market\_ASK* построены с учетом спреда

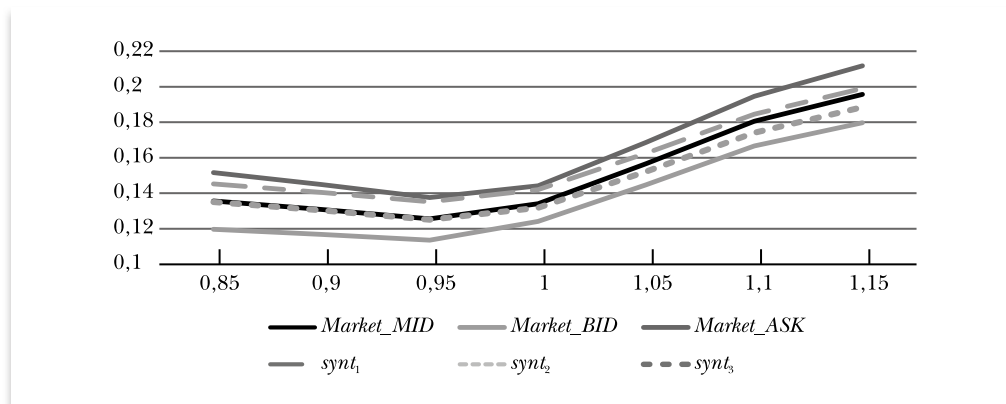


Рис. 7

Графики волатильности EURRUB, полученные при  $T = 2M$  за 01.07.2020

волатильности, который на ATM-страйке составляет 2% и изменяется по закону  $spread = 8|k - 1| + 2$ , где  $spread$  – спред волатильности, %;  $k$  – денежность. Кривые  $Market\_MID$ ,  $Market\_BID$  и  $Market\_ASK$  связаны соотношением (24).

2. Кривая синтетической волатильности  $synt_1$  рассчитывается по формуле (31) с использованием оценки корреляции при помощи модели DCC-GARCH (1, 1) из пп. 3.1.3 и в соответствии с методологией из п. 3.2.

3. Кривая синтетической волатильности  $synt_2$  рассчитывается по формуле (31) с использованием оценки исторической корреляции из пп. 3.1.1 и в соответствии с методологией из п. 3.2.

Корреляции, используемые в расчетах, указаны в табл. 3. Волатильности вычислены на интервале денежностей от 0,85 до 1,15.

Отклонение кривой  $synt_1$  от кривой  $Market\_MID$  на рис. 7 можно объяснить расхождением между вмененной и DCC-корреляциями. Кривая  $synt_2$  практически совпадает с кривой вмененной волатильности в области ITM, однако расхождение увеличивается при переходе и углублении в область OTM. В данном случае значение коэффициента исторической корреляции находится относительно близко к значению вмененной корреляции. При этом и кривая  $synt_1$ , и  $synt_2$  попадают в спред волатильности, тем самым попадают в область практического применения.

Таблица 3

Корреляция, рассчитанная на 01.07.2020 по формулам (24) и (30) при  $\rho_0 = -0,1487$ ;  $\bar{\rho} = -0,1442$ ;  $\alpha = 0,0741$ ;  $\beta = 0,6849$

$T$	2M	1Y
$\rho_{DCC}$	-0,1442	-0,1442
$\rho_{hist}$	-0,2945	-0,1145

Источник: оценки авторов.



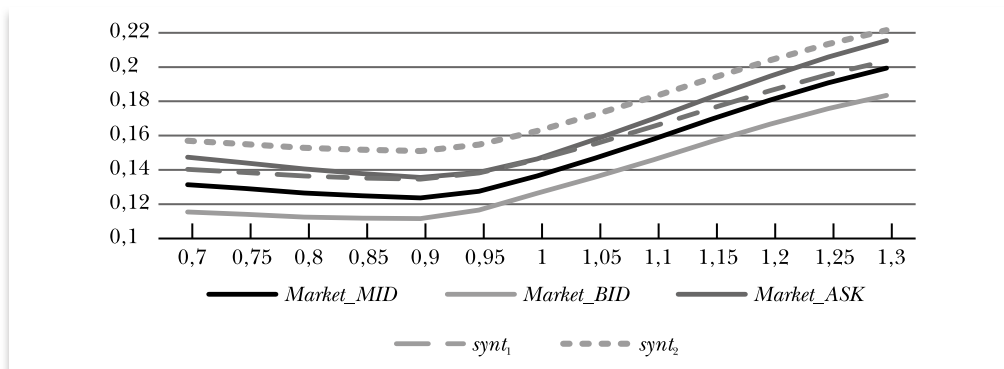


Рис. 8

Графики волатильности EURRUB, полученные при  $T = 1Y$  за 01.07.2020

На рис. 8 представлены аналогичные графики для  $T = 1Y$ . Волатильности посчитаны на интервале денежностей от 0,7 до 1,3. Спред волатильности на АТМ-страйке составляет 2% и изменяется по закону  $spread = 4|k - 1| + 2$ , где  $spread$  — спред волатильности, %;  $k$  — денежность. График  $synt_1$  повторяет ситуацию на рис. 7, однако  $synt_2$  в данном случае находится значительно выше, чем кривая  $Market\_MID$  и  $synt_1$ . Объяснить это можно тем, что значение годовой исторической корреляции превышает как значение вмененной годовой корреляции, так и DCC-корреляции. Таким образом, график кривой  $synt_1$  попадает в область практического применения, в отличие от кривой  $synt_2$ .

В случае когда используется неинвариантная корреляция, применение любого подхода к оценке волатильности будет приводить к отклонению от рыночной кривой. В данном случае рынок закладывает отличное значение корреляции, от того, что получается при оценке с помощью модели DCC или с помощью исторической корреляции. Однако когда рынка нет, расчет вмененной корреляции невозможен. Таким образом, оценка корреляции может быть получена с помощью исторической или DCC-корреляций.

#### 4.4. Поверхность волатильности синтетического BRENT RUB

В качестве примера построения поверхности волатильности неторгуемого кросс-актива рассмотрим нефть марки Brent, номинированную в российских рублях:

$$BRENT_{RUB} = BRENT \times USDRUB, \quad (34)$$

где  $BRENT$  — нефть марки Brent, номинированная в USD,  $USDRUB$  — валютная пара.

Сконструируем синтетическую волатильность кросс-актива для срочностей 2, 29, 64 дня. В качестве источников были взяты данные биржи ICE (опционы на BRENT) и данные Московской биржи (опционы на USDRUB). В табл. 4 представлены данные рассчитанной DCC-корреляции. В табл. 5 и 6 показаны поверхности вмененных волатильностей BRENT и USDRUB, полученные на основании данных с ICE и Московской биржи соответственно. Чтобы сконструировать синтетическую волатильность, даты истечения опционов компонентов кросс-актива должны совпадать. Таким образом, в рассматриваемом примере необходимо найти волатильности опционов на USDRUB (обращаются на бирже MOEX) на даты, соответствующие датам истечения опционов на BRENT (обращаются на бирже ICE).

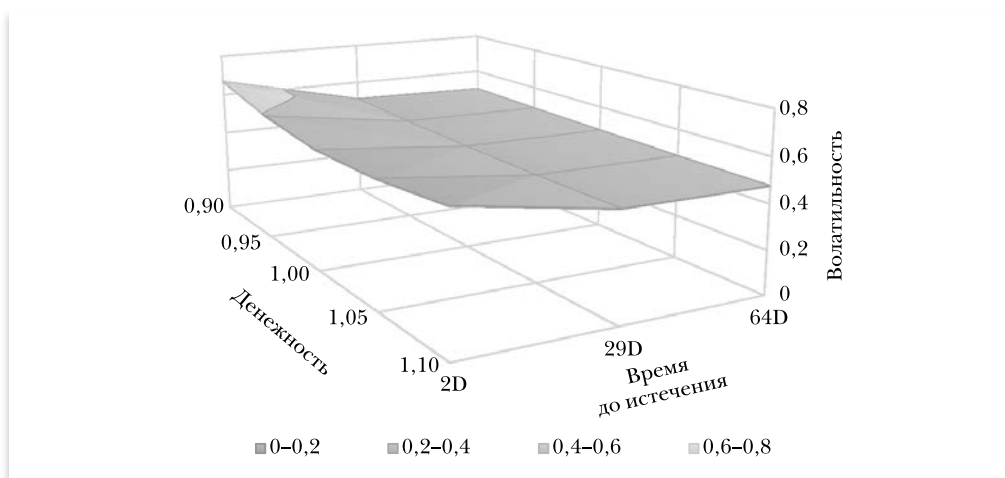


Рис. 9

Поверхность волатильности кросс-актива BRENTTRUB

В качестве стандартного подхода можно взять интерполяцию величины *Total Variance* (Iason Ltd., 2007). Используя методологию, описанную в разд. 3, получим поверхность BRENTTRUB (рис. 9, табл. 7).

Таблица 4

Корреляция, рассчитанная на 22.11.2022 по формуле (30)  
при  $\rho_0 = -0,1889$ ;  $\rho = -0,1910$ ;  $\alpha = 0,0097$ ;  $\beta = 0,9694$

$T$	2D	29D	64D
$\rho$	-0,1890	-0,1899	-0,1904

Источник: оценки авторов.

Таблица 5

Поверхность волатильности BRENT

$T \backslash k$	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
2D	0,64394	0,56248	0,51545	0,52238	0,56350
29D	0,49193	0,47589	0,46517	0,46022	0,46120
64D	0,47795	0,46841	0,46098	0,45498	0,45217

Источник: ICE.

Таблица 6

Поверхность волатильности USDRUB

$T \backslash k$	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
2D	0,44613	0,27003	0,17307	0,27525	0,41165
29D	0,24103	0,20511	0,19278	0,20890	0,24479
64D	0,24085	0,22057	0,21263	0,21813	0,23367

Источник: оценки авторов.

Таблица 7

Поверхность волатильности синтетического *BRENTRUB*

$T \backslash k$	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
2D	0,66812	0,59471	0,55335	0,55939	0,59562
29D	0,50925	0,49464	0,48493	0,48045	0,48134
64D	0,49904	0,49046	0,48380	0,47845	0,47594

Источник: оценки авторов.

### 5. Заключение

В данном исследовании приводится вывод аналитического выражения для оценки стоимости европейского композитного опциона. Находятся явные выражения для определения значений коэффициентов чувствительностей рассматриваемого опциона. Оценка дериватива, который зависит более чем от одного базового актива, требует знания коэффициента корреляции между логарифмическими доходностями этих активов. Предложен ряд подходов, позволяющих оценить коэффициент корреляции. Показано, что в случае если известна АТМ-волатильность кросс-актива, то вмененная корреляция вычисляется явно. В случае когда АТМ-волатильность кросс-актива неизвестна, корреляцию можно оценить, используя историческую корреляцию или модель DCC-GARCH (1, 1). В периоды структурных изменений поведения цены базового актива более предпочтительна корреляция, полученная в рамках модели DCC-GARCH (1, 1). На примере синтетического кросс-валютного актива *EURRUB* и *USDRUB* продемонстрировано, что, фиксируя вмененную волатильность менее рискованного актива на АТМ-страйке и варьируя вмененную волатильность более рискованного актива, можно определить поверхность волатильности кросс-актива, наиболее близкую к наблюдаемой.

Проверка предложенных процедур восстановления поверхности волатильности кросс-актива происходила на валютных парах *EURRUB* и *USDRUB*, так как валютный рынок в целом является единственным источником, который способен дать базу для сравнения. Отметим, что точность оценок синтетических волатильностей, продемонстрированных в работе с использованием исторической и DCC-корреляций для кросс-активов *EURRUB* и *USDRUB*, может иметь другой уровень качества для иных кросс-активов.

Ввиду того что кросс-активы, номинированные в рублях, представляют для авторов особый интерес, в заключении работы продемонстрирован пример построения поверхности волатильности для неторгуемого актива *BRENTRUB*.

Результаты настоящей работы могут быть использованы для определения цены европейского композитного опциона, его коэффициентов хеджирования, а также получения синтетической поверхности волатильности кросс-актива.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

Рассмотрим случай, когда кросс-актив  $S_3(t)$  представим в виде отношения

$$S_3(t) = S_2(t) / \widetilde{S}_1(t), \quad (35)$$

где  $\widetilde{S}_1(t)$  — обменный курс национальной валюты в иностранную валюту в момент  $t$  (так называемый обратный курс);  $S_2(t)$  — стоимость иностранного актива  $S_2$  в момент  $t$ .

Положим, что базовые активы  $\widetilde{S}_1$  и  $S_2$  следуют геометрическому броуновскому движению (Oksendal, 2013). Если цена кросс-актива  $S_3(t)$  определена в виде (35), справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{S}_1(t)}{\widetilde{S}_1(t)} &= (r_f - r_d)dt + \sigma_1 dW_t^{\widetilde{S}_1, \mathbb{Q}^f}, & \frac{dS_2(t)}{S_2(t)} &= (r_f - q)dt + \sigma_2 dW_t^{S_2, \mathbb{Q}^f}, \\ d\langle W_t^{\widetilde{S}_1, \mathbb{Q}^f}, W_t^{S_2, \mathbb{Q}^f} \rangle_t &= \rho_{\widetilde{S}_1, S_2} dt = \widehat{\rho} dt, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $r_d$  — внутренняя безрисковая процентная ставка;  $r_f$  — внешняя безрисковая процентная ставка;  $\sigma_1$  — волатильность обменного курса  $\widetilde{S}_1$ ;  $\sigma_2$  — волатильность цены иностранного актива  $S_2$ ;  $q$  — доходность актива  $S_2$ ;  $\widehat{\rho}$  — коэффициент корреляции между  $W_t^{\widetilde{S}_1, \mathbb{Q}^f}$  и  $W_t^{S_2, \mathbb{Q}^f}$ ;  $W_t^{\widetilde{S}_1, \mathbb{Q}^f}$  — броуновский процесс в иностранной риск-нейтральной мере;  $W_t^{S_2, \mathbb{Q}^f}$  — броуновский процесс в иностранной риск-нейтральной мере. Используя теорему Гирсанова (Björk, 2009), переведем  $\widetilde{S}_1(t)$  и  $S_2(t)$  в национальную риск-нейтральную меру  $\mathbb{Q}^d$ :

$$\frac{d\widehat{S}_1(t)}{\widehat{S}_1(t)} = (r_f - r_d + \sigma_1^2)dt + \sigma_1 dW_t^{\widehat{S}_1, \mathbb{Q}^d}, \quad \frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = (r_f - q + \widehat{\rho}\sigma_1\sigma_2)dt + \sigma_2 dW_t^{S_2, \mathbb{Q}^d}. \quad (37)$$

Применяя лемму Ито (Björk, 2009) относительно  $\ln \widehat{S}_1(t)$  и  $\ln S_2(t)$ , получаем выражения для  $\widehat{S}_1(t)$  и  $S_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \widehat{S}_1(t) &= \widehat{S}_1(0) \exp\left\{(r_f - r_d + 0,5\sigma_1^2)t + \sigma_1 W_t^{\widehat{S}_1, \mathbb{Q}^d}\right\}, \\ S_2(t) &= S_2(0) \exp\left\{(r_f - q + \widehat{\rho}\sigma_1\sigma_2 - 0,5\sigma_2^2)t + \sigma_2 W_t^{S_2, \mathbb{Q}^d}\right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Аналогично (20), сформулируем следствие для оценки композитного опциона, в случае когда кросс-актив представим в виде (35).

**Следствие 2.** Стоимость европейского композитного опциона  $V$  на кросс-актив  $S_3$ , в случае когда  $S_3(T) = S_2(T) / \widehat{S}_1(T)$ , где  $T$  — момент истечения опциона;  $\widehat{S}_1(T)$  — обменный курс национальной валюты в иностранную валюту в момент времени  $T$ ;  $S_2(T)$  — стоимость иностранного актива  $S_2$  в момент времени  $T$ , вычисляется по формуле

$$V = e^{-r_d T} \left( \phi \frac{F_2(T)}{\widehat{F}_1(T)} N(\phi d_1) - \phi K N(\phi d_2) \right), \quad (39)$$

где  $\phi = 1$  — в случае опциона-колл и  $\phi = -1$  — для опциона-пут;

$$\begin{aligned} d_1 &= \left( \ln \frac{F_2(T)}{K \widehat{F}_1(T)} + 0,5\sigma_3^2 T \right) / (\sigma_3 \sqrt{T}), \quad d_2 = d_1 - \sigma_3 \sqrt{T}, \quad \sigma_3^2 = \sigma_1^2 - 2\widehat{\rho}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2, \\ \widehat{F}_1(T) &= \widehat{S}_1(0) e^{(r_d - r_f)T}, \quad F_2(T) = S_2(0) e^{(r_f - q)T}, \end{aligned}$$

$r_d$  — безрисковая процентная ставка национальной валюты;  $r_f$  — безрисковая процентная ставка иностранной валюты;  $\sigma_1$  — волатильность обменного

курса  $\widehat{S}_1; \sigma_2$  – волатильность цены иностранного актива  $S_2; q$  – доходность актива  $S_2$ ;  $\widehat{\rho}$  – коэффициент корреляции между логарифмическими доходностями цен  $\widehat{S}_1(t)$  и  $S_2(t)$ ;  $N(d)$  – интегральная функция стандартного нормального распределения вида.

## ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

- Нагапетян А.Р.** (2019). Моделирование волатильности доходности акций и фондовых индексов на российском рынке акций с учетом индекса диверсификационного потенциала рынка // *Прикладная эконометрика*. Т. 56. № 4. С. 45–61. [Nagapetyan A.R. (2019). Precondition stock and stock indices volatility modeling based on market diversification potential: Evidence from Russian market. *Applied Econometrics*, 56, 45–61 (in Russian).]
- Bennett M.N., Kennedy J.E.** (2004). Quanto pricing with copulas. *The Journal of Derivatives*, 12, 1, 26–45.
- Björk T.** (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford: Oxford University Press.
- Breeden D.T., Litzenberger R.H.** (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51, 4, 621–651.
- Castren O., Mazzotta S.** (2005). *Foreign exchange option and returns based correlation forecasts: Evaluation and two applications*. SSRN: 668247.
- Chang W., Pant V.** (2003). *The valuation of options in illiquid markets: A comparison of methods*. SSRN: 356160.
- Cherubini U., Luciano E.** (2002). Bivariate option pricing with copulas. *Applied Mathematical Finance*, 9, 2, 69–85.
- Derman E., Karasinski P., Wecker J.S.** (1990). *Understanding guaranteed exchange-rate contracts in foreign stock investments*. International Equity Strategies, Goldman Sachs.
- Eklund S., Estaifo R.** (2018). *Modeling implied correlation matrices using option prices*. Royal Institute of Technology. School of Engineering Sciences. Stockholm, Sweden. Available at: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1215668/FULLTEXT02>
- Engle R.** (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20, 3, 339–350.
- Galanos A.** (2022). *rmgarch: Multivariate GARCH models. R package version 1.3–9*. Available at: <https://cran.r-project.org/web/packages/rmgarch/rmgarch.pdf>
- Haug E.G.** (2007). *The complete guide to option pricing formulas*. N.Y.: McGraw-Hill Education.
- Hull J.C.** (2003). *Options futures and other derivatives*. N.Y.: Pearson Education India.
- Madan D.B., Wang K.** (2021). Pricing product options and using them to complete markets for functions of two underlying asset prices. *Journal of Risk and Financial Management*, 14, 8, 355.
- Oksendal B.** (2013). *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Berlin: Springer Science & Business Media.
- Pulido S.** (2014). The fundamental theorem of asset pricing, the hedging problem and maximal claims in financial markets with short sales prohibitions. *The Annals of Applied Probability*, vol. 4, 1, 54–75.
- Reiner E.** (1992). Quanto mechanics. *Risk*, 5, 3, 59–63.
- Salmon M., Schleicher C.** (2006). *Pricing multivariate currency options with copulas. Copulas: From theory to application in finance*. London: Risk Books.

- Taylor S.J., Wang Y.H.** (2010). Option prices and risk-neutral densities for currency cross rates. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 30, 4, 324–360.
- Walter C.A., Lopez J.A.** (2000). Is implied correlation worth calculating? Evidence from foreign exchange options. *The Journal of Derivatives*, 7, 3, 65–81.
- Weert F. de** (2011). *Exotic options trading*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Wilmott P.** (2007). *Paul Wilmott introduces quantitative finance*. Chichester: John Wiley & Sons.

Поступила в редакцию 01.03.2023

Received 03.01.2023

**R.A. Kopaliani**

Bank Saint Petersburg, Saint Petersburg, Russia

**N.A. Denisov**

Bank Saint Petersburg, Saint Petersburg, Russia

## Composite option pricing and the volatility surface construction

**Abstract.** This paper proposes a methodology for constructing a cross-asset volatility surface. This volatility surface makes it possible to evaluate the price and risk metrics of options for assets, which do not have a liquid options market and can be created through the composition of two liquid assets. A version of the derivation of an analytical formula for estimating the value of a European option on a cross-asset and expressions for calculating risk measures (“Greeks”) are proposed. The key parameters for constructing a cross-asset surface are the correlation between the components of the cross-asset and the implied volatilities of the components of the cross-asset. Different approaches are presented for estimating the correlation coefficient: using historical correlation, dynamic conditional correlation model, and implied correlation. It is demonstrated that if the volatility «at the money» of a cross-asset is known, then the implied correlation is calculated explicitly, otherwise historical correlation or the DCC-GARCH (1,1) model can be used. It is shown that by fixing the implied volatility «at the money» of a less risky asset and varying the implied volatility of a riskier asset, the cross-asset volatility surface is obtained that is closest to the observed one. The article presents strict theoretical calculations and makes it possible to evaluate composite options price in practice.

**Keywords:** *cross-asset, exotic option, GARCH, implied volatility, option pricing, implied correlation.*

JEL Classification: C00, G13, G12.

For reference: **Kopaliani R.A., Denisov N.A.** (2023). Composite option pricing and the volatility surface construction. *Journal of the New Economic Association*, 3 (60), 27–48 (in Russian).

DOI: 10.31737/22212264\_2023\_3\_27-48

EDN: CXCGZP