Журнал НЭА,
№ 2 (59), 2023,
с. 12–34

Э.Л. Пресман
ЦЭМИ РАН, МШЭ МГУ, Москва

И.М. Сонин
ЦЭМИ РАН, Москва; Университет Северной Каролины в Шарлотте (UNCC), США

Модель управления запасами с ценами на сырье, зависящими от цепи Маркова с непрерывным временем

Аннотация. Рассматривается модель управления запасами, когда производитель (фирма) должен с постоянной интенсивностью использовать для производства промежуточный продукт (товар). Цена товара является цепью Маркова с непрерывным временем, конечным числом состояний и известными переходными интенсивностями. Фирма может покупать товар по текущей цене либо использовать уже купленный и хранящийся на складе. Стоимость хранения пропорциональна количеству хранящегося товара. Целью фирмы является минимизация ожидаемых дисконтированных суммарных издержек. Доказывается, что существует оптимальная стратегия и она носит пороговый характер, т.е. для каждого состояния марковской цепи существует оптимальный уровень хранения товара. Приводится алгоритм нахождения оптимальных порогов и построения оптимального значения функционала. Это значение, которое зависит от начального состояния цепи и начального уровня запаса, мы называем функцией выигрыша. Показывается, что, как правило, оптимальная стратегия единственна, но при некоторых соотношениях между параметрами единственности нет. Описываются все возможные случаи неединственности и все оптимальные управления. В типичных задачах оптимизации в непрерывном времени для нахождения оптимальной стратегии при анализе уравнения оптимальности (уравнение Беллмана) обычно используется гладкое склеивание первых производных функции выигрыша. Специфика нашей модели приводит к тому, что уравнение оптимальности удобно выписывать не в непрерывном, а в дискретном времени для вложенной марковской цепи, гладкое склеивание имеет место для второй производной от функции выигрыша, рассуждения удобно проводить не с функцией выигрыша, а с ее производной.

Ключевые слова: *модель управления запасами, марковская цепь, уравнение оптимальности.*

Классификация JEL: C61, D25, D81.

Для цитирования: **Пресман Э.Л., Сонин И.М.** (2023). Модель управления запасами с ценами на сырье, зависящими от цепи Маркова с непрерывным временем // *Журнал Новой экономической ассоциации.* № 2 (59). С. 12–34.

DOI: 10.31737/22212264_2023_2_12-34

EDN: ATSQDH

1. Введение

Существуют разные математические модели управления запасами (см., например, (Arrow, Harris, Marschak, 1951; Bather, 1966; Rubalskiy, 1972; Browne, Zipkin, 1991; Bayer, Cheng, Sethi, 2010; Булинская, Соколова, 2015)). Такие модели позволяют найти оптимальную стратегию закупки товара, минимизирующую суммарные затраты на покупку, оформление и доставку заказа, хранение товара, а также убытки от его дефицита.

В данной работе рассматривается следующая задача управления запасами. Имеется производитель, которому для производства нужно с постоянной интенсивностью потреблять промежуточный продукт (товар). Если цена товара

Журнал НЭА,
№ 2 (59), 2023,
с. 12–34

постоянна, то нужно с той же интенсивностью закупать товар и тем самым будет обеспечено производство. Если цена меняется со временем, то при малой цене целесообразно разово закупить некоторое его количество, чтобы не переплачивать при большом значении цены. Закупленный впрок продукт нужно где-то хранить и, следовательно, надо платить за его хранение. Примером такого товара является хлопок, который до сих пор является одним из важнейших мировых продуктов и отличается существенным колебанием цен (Darekar, Reddy, 2017).

И.М. Сонин предложил рассмотреть ситуацию, когда цена зависит от значения цепи Маркова с непрерывным временем, конечным числом N состояний и известными интенсивностями переходов. В этом случае целесообразно создать склад и делать закупки и создавать запас, сообразуясь с ценой. Считается, что закупки по текущей цене можно производить как крупными партиями, так и непрерывно увеличивая (не уменьшая) количество купленного товара.

Предполагается, что плата за хранение пропорциональна количеству товара, имеющегося на складе, затраты на осуществление заказа не зависят от размера заказа, заказ осуществляется мгновенно.

Проблема состоит в том, как организовать работу склада, чтобы минимизировать ожидаемые издержки на хранение и закупки товара, при этом издержки можно рассматривать как дисконтированные, так и предельные средние за единицу времени.

Для случая $N = 2$ и частных случаев при $N = 3$ эта задача изучалась сначала в (Hill, 2004), а потом в (Hill, Sonin, 2006; Katehakis, Sonin, 2013). В этих работах рассматривались предельные средние за единицу времени ожидаемые издержки и предполагалось, что в общем случае стратегия оптимальной организации работы склада носит пороговый характер, т.е. для каждого состояния i существует такой порог a_i, что:

– если количество x товара на складе меньше или равно a_i, то сначала надо разово произвести закупку до этого порога, т.е. купить товар в количестве $a_i - x$, а потом, вплоть до следующего скачка марковского процесса надо закупать товар с единичной интенсивностью, чтобы запас на складе был равен пороговому значению a_i;

– если $x > a_i$, то проводить закупки не следует вплоть до следующего скачка марковского процесса или момента, когда значение запаса станет равным a_i.

Предполагалось, но не доказывалось, что для состояния с максимальной ценой порог равен нулю. В классе таких стратегий было найдено сначала значение оптимального порога для случая цепи с двумя состояниями, а потом оптимальные пороги для случая трех состояний, когда из состояния с максимальным и минимальным значением цены возможны переходы только в состояние со средним значением цены.

Идея нахождения оптимальных порогов состояла в следующем. Без ограничения общности предполагалось, что $P_1 > P_2 > P_3$, где P_i — цена товара в состоянии i. Для порогов $a_1 = 0, a_2 \geq 0, \quad a_3 \geq 0$ рассматривалось стационарное распределение размера запаса на складе. После этого подсчитывалось значение функционала, соответствующее этим порогам, и брался минимум по возможным значениям порогов $a_2 \geq 0$ и $a_3 \geq 0$. Получалось оптимальное значение по выбранному классу.

Журнал НЭА,
№ 2 (59), 2023,
с. 12–34

При таком подходе непонятно, как доказывать оптимальность по классу всех допустимых управлений. Как доказать, что $a_1 = 0$? Что делать для общего случая при числе состояний N=3? Как решать задачу при $N > 3$?

В данной работе мы рассмотрим случай дисконтированных издержек. Используя, в частности, методы, разработанные в работах (Presman, Sonin, 1982; Presman, Sethi, 2006; Presman, Sethi, Zhang, 1995), для общего случая $N \geq 2$ докажем существование оптимальных пороговых стратегий, приведем алгоритм их построения и опишем все возможные случаи неединственности оптимальных стратегий.

В разд. 2 сначала приводится постановка задачи, при этом рассматривается общий случай с произвольным конечным числом состояний, с неупреждающими управлениями и с функционалом для ожидаемых дисконтированных издержек. Случай предельных средних за единицу времени ожидаемых издержек получается отсюда предельным переходом при параметре дисконтирования, стремящемся к нулю, и рассмотрен в работе (Пресман, 2021).

После постановки задачи формулируется теорема 1 о существовании оптимального порогового управления, в которой, кроме того, в терминах параметров модели указывается, какие пороги равны нулю и какие больше нуля. Также приводится система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют производные от функции выигрыша, и алгоритм решения этой системы и построения оптимальных порогов.

Оказывается, что, как правило, оптимальное управление единственно и носит пороговый характер, при этом минимальный порог всегда равен нулю и в множество состояний с нулевым порогом всегда входит состояние с максимальной ценой. Тем не менее, если среди переходных интенсивностей марковской цепи есть нулевые, то при некоторых соотношениях между параметрами может оказаться, что наряду с состояниями, для которых оптимальное управление единственно, могут существовать состояния, для которых оптимальное управление неединственно и носит квазипороговый характер. Это означает, что если i такое состояние, то для него найдется $\overline{a}_i > 0$ со следующим свойством. Если уровень запаса на складе больше $\overline{a}_i$, то, так же, как для порогового управления, проводить закупки заведомо не следует вплоть до минимального из двух моментов: скачка марковского процесса или момента достижения уровня запаса, равного $\overline{a}_i$. Если уровень запаса на складе меньше или равен $\overline{a}_i$, то можно вплоть до следующего скачка марковского процесса использовать любое управление, не выводящее уровня запаса за пределы интервала $[0, \overline{a}_i]$. В частности, управление с нулевым порогом оптимально для таких состояний.

В конце разд. 2 формулируется теорема 2, описывающая те состояния, для которых оптимальное управление единственно. Для оставшихся состояний приведена структура неединственности.

В разд. 3 и 4 доказывается теорема 1. В разд. 3 исследуются некоторые свойства функций выигрыша и доказывается та часть теоремы 1, которая связана с существованием оптимальной пороговой стратегии, уравнений для функций выигрыша и нахождением состояний с нулевыми порогами. В разд. 4 приводится алгоритм последовательного построения порогов. Алгоритм состоит в последовательном решении упомянутой системы уравнений на интервалах между порогами (начиная с интервала между минимальным порогом, который равен нулю,

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

и минимальным положительным порогом, и т.д.), при этом значения порогов определяются из выполнения необходимого условия оптимальности, состоящего в дважды непрерывной дифференцируемости функций выигрыша.

В разд. 5 проводится полный разбор случая $N = 2$.

Доказательство теоремы 2 приводится в Приложении в п. П1, а в п. П2 дается полный разбор случая $N = 3$.

Отметим теперь основные идеи и особенности результатов и доказательств.

1. В задачах с марковскими цепями с непрерывным временем уравнение оптимальности удобно выписывать в виде выбора оптимального управления до момента первого скачка, т.е. рассмотреть вложенную цепь Маркова. После этого из соображений выпуклости функций выигрыша легко показать, что существует оптимальное пороговое управление.

2. В такого рода задачах удобно от изучения функции выигрыша перейти к изучению ее производной.

3. Вместо условия гладкого склеивания (непрерывность производной функции выигрыша), которое возникает в задачах с диффузионными процессами, в рассматриваемых задачах появляется условие дважды гладкого склеивания (непрерывность второй производной).

4. При некоторых соотношениях между параметрами оптимальное управление может оказаться неединственным.

Мы уверены, что эти идеи справедливы и для других задач такого типа. В заключение отметим, что рассматриваемая задача допускает гораздо более общую интерпретацию в экономических, финансовых и страховых терминах.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть задан *непрерывный справа* марковский процесс $\{m(t)\}_{0\le t<\infty}$, $m(0)=i$, с конечным числом состояний N и матрицей интенсивностей переходов (инфинитезимальным оператором) $\Lambda=(\lambda_{i,j})$, $\lambda_{i,j}\ge 0$ $i\ne j$, $\lambda_{i,i}=-\sum_{j\ne i}\lambda_{i,j}=-\lambda_i<0$, $i,j\in J=\{1,\ldots,N\}$, т.е. если в какой-то момент времени процесс находится в состоянии i, то за малое время Δ с вероятностью $\lambda_{i,j}\Delta+o(\Delta)$ он переходит в состояние j, а с вероятностью $1-\lambda_i\Delta+o(\Delta)$ остается в состоянии i.

Пусть $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t<\infty}$ — фильтрация, порожденная марковским процессом, т.е. $\mathcal{F}_t$ содержит всю информацию до момента t включительно. Управление u — это $\mathcal{F}$-согласованная, *непрерывная слева* неубывающая функция $u(t)$, $u(0)=0$. Ее значение в момент t соответствует суммарным закупкам товара до момента t включительно, т.е. суммарные закупки до момента t могут зависеть только от поведения марковского процесса до момента t и не могут учитывать, произошел ли в момент t скачок. Моменты и размеры скачков соответствуют моментам и размерам разовых закупок.

Поскольку потребление товара происходит с единичной интенсивностью, то

$$x^u(t)=x-t+u(t) \tag{1}$$

определяет количество товара на складе в момент t при начальном запасе $x\ge 0$.

Управления, для которых $x^u(t)\ge 0$ при всех $t\ge 0$ и значение функционалов конечно, будем называть допустимыми. Обозначим через $U(x)$ класс допустимых управлений для начальной точки x. Для $u\in U(x)$ рассматриваются функционалы

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

$$V_i^u(x) = E_{i,x}\left\{\int_0^\infty e^{-\rho t}\,cx^u(t)dt + \int_0^\infty e^{-\rho t}\,P_{m(t)}du(t)\right\},\quad \rho > 0, \qquad (2)$$

где $c \geq 0$ — стоимость хранения единицы товара за единицу времени; P_i — цена товара при условии, что марковский процесс находится в состоянии $i \in J$; $E_{i,x}\{\cdot\}$ — математическое ожидание при начальном состоянии марковского процесса, равном i, и начальном состоянии запаса x. Без ограничения общности считается, что $P_i > P_{i+1}$ при $1 \leq i \leq N-1$.

Требуется найти значение

$$V_i(x) = \inf_{u \in U(x)} V_i^u(x), \quad i \in J, \qquad (3)$$

и определить оптимальное управление. Функции $V_i(x)$, $i \in J$, называются функциями выигрыша. Функцией выигрыша мы будем называть также *вектор* $V(x)$ с координатами $V_i(x)$, $i \in J$.

Будем говорить, что управление является a_i-пороговым в состоянии $i \in J$, если оно удовлетворяет следующим условиям.

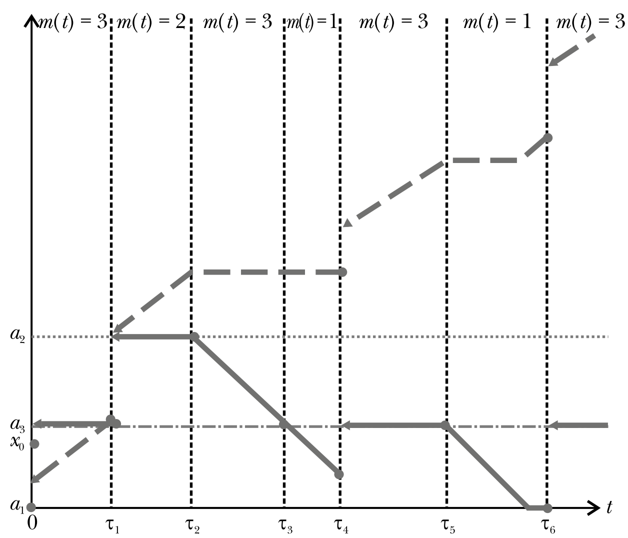
Пусть в какой-то момент времени $t_0 \geq 0$ выполняется равенство $m(t_0) = i$, $x(t_0) = x$ и пусть $t_0 + \tau$ — момент первого после t_0 скачка процесса $m(t)$.

Если $x \leq a_i$, то $u(t) = u(t_0) + a_i - x + t - t_0$ при $0 < t - t_0 \leq \tau$, т.е. в момент t_0 делается разовая закупка размером $a_i - x$, а после этого до момента $t_0 + \tau$ производятся закупки с единичной интенсивностью. Это означает, что $x^u(t) = a_i$ при $t_0 < t \leq t_0 + \tau$.

Если $x > a_i$, то $u(t) = u(t_0) + \max[0,\ t - t_0 - (x - a_i)]$ при $0 < t - t_0 \leq \tau$, т.е.

– при $0 < t - t_0 < \min[x - a_i, \tau]$ закупок не делается, так что $x^u(t) = x - (t - t_0) > a_i$ при $0 < t - t_0 \leq \min[x - a_i, \tau]$,

– при $x - a_i < t - t_0 \leq \tau$ производятся закупки с единичной интенсивностью, а значит, $x^u(t) = a_i$ при $x - a_i < t - t_0 \leq \tau$.



Рисунок

Траектории процессов x(t) (сплошная линия) и u(t) (пунктирная линия), соответствующих (a_1, a_2, a_3)*-пороговой стратегии, с* $x(0) = x_0$, $m(0) = 3$

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

Рассмотрим вектор a с координатами $a_1,\ldots,a_N$. Назовем a пороговой стратегией управления, которое при каждом $i\in J$ является a_i-пороговым. На рисунке изображены траектории процессов $x(t)$ и $u(t)$, соответствующие a-пороговой стратегии для случая $N=3$, при этом $\tau_1,\tau_2,\ldots$, последовательные моменты скачков цепи Маркова $m(t)$.

Пусть P — это N-мерный вектор-столбец с координатами P_i, $i\in J$; I — это N-мерный вектор-столбец с координатами, равными 1; E — это $N\times N$-диагональная матрица с единицами на диагонали; $V(x)$ — вектор-столбец с координатами $V_i(x)$, $i\in J$; $\mathbf{0}$ — это N-мерный вектор-столбец с нулевыми координатами. Определим вектор $b=(\Lambda-\rho E)(-P)+cI$, так что

$$b_i = c+(\lambda_i+\rho)P_i-\sum_{j\neq i}\lambda_{i,j}P_j = c+\rho P_i+\sum_{j\neq i}\lambda_{i,j}(P_i-P_j),\quad i\in J. \tag{4}$$

Далее мы покажем, что для любого состояния i существует оптимальное пороговое управление, при этом равенство оптимального порога нулю или его положительность зависит от знака b_i.

Положим

$$J_+=\{i: b_i>0\},\quad J_0=\{i: b_i=0\},\quad J_-=\{i: b_i<0\}. \tag{5}$$

Замечание 1. Множество J_+ непусто, так как в силу того что $P_1>P_i$ для всех $i>1$, из второго равенства в (4) получаем, что $b_1>0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.

1. *Существует такой вектор a^*, что a^*-пороговая стратегия оптимальна по классу всех допустимых управлений в задаче минимизации функционала* (2).

2. *Вектор-функция $V(x)$ выпукла, а ее производная $U(x)=\dfrac{dV(x)}{dx}$ является единственным непрерывно дифференцируемым решением уравнения*[1]

$$\frac{dU(x)}{dx}=\max[b(x),\mathbf{0}],\ U(\mathbf{0})=-P,\ \text{где}\ b(x)=(\Lambda-\rho E)U(x)+cI=(\Lambda-\rho E)\left(U(x)-\frac{c}{\rho}I\right), \tag{6}$$

при этом

$$b(0)=b,\quad b_i(x)<0\ \text{при}\ 0\le x<a_i^*;\quad b_i(x)\ge 0\ \text{при}\ x\ge a_i^*,\quad i\in J, \tag{7}$$

а значит,

$$a_i^*>0\ \text{тогда и только тогда, когда}\ i\in J_-. \tag{8}$$

Функция $V(x)$ определяется из соотношения

$$V(x)=\begin{cases}\dfrac{c(\rho x-1)}{\rho^2}I-\displaystyle\int_x^\infty\left(U(y)-\frac{c}{\rho}I\right)dy & \text{при}\ x\ge a^m=\max_i\{a_i^*\};\\ -\displaystyle\int_x^{a^m}U(y)dy+V(a^m) & \text{при}\ 0\le x<a^m.\end{cases} \tag{9}$$

3. *Если $a^m>0$, то функции $U(x)$ и пороги a_i^* можно построить последовательно на последовательных интервалах между порогами, начиная с интервала $[a^{(1)},a^{(2)}]$, где $a^{(1)}=0$, $a^{(2)}$ – минимальный положительный порог. На этом интервале сначала строится $U(x)$, а потом из условия непрерывной дифференцируемости $U(x)$ находится $a^{(2)}$ и множество $I^{(2)}=\{i: a_i^*=a^{(2)}\}$. Затем, если $a^m>a^{(2)}$, то это же делается для интервала $[a^{(2)},a^{(3)}]$, где $a^{(3)}$ – минимальный порог из тех порогов, которые больше, чем $a^{(2)}$, и т. д. до $a^{(r)}$, где число r определяется из условия $a^{(r)}=a^m$. При $x\ge a^m$ всегда (в том числе при $a^m=0$)*

$$U(x)=\frac{c}{\rho}I+e^{(\Lambda-\rho E)(x-a^m)}\left(U(a^m)-\frac{c}{\rho}I\right)=e^{(\Lambda-\rho E)(x-a^m)}U(a^m)+\left(1-e^{-\rho(x-a^m)}\right)\frac{c}{\rho}I. \tag{10}$$

Доказательство пунктов 1 и 2 проводится в разд. 3, а точная формулировка описанного в п. 3 алгоритма построения функций $U(x)$ и порогов a^* — в разд. 4.

[1] Здесь и далее для любого вектора d запись $\max[d,0]$ обозначает взятие покоординатного максимума.

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

В случае однородной инфляции, когда цены в стране растут с темпом β, утверждение теоремы остается в силе, если заменить ставку дисконтирования ρ на $\rho+\beta$. Из формулы (4) следует, что если при ρ, близком к нулю, есть положительные пороги (им соответствуют отрицательные b_i), то с ростом ρ их становится все меньше, и при достаточно большом ρ все пороги становятся равными нулю. Можно доказать, что с ростом ρ все пороги уменьшаются (не возрастают).

Ниже мы покажем, что в задаче минимизации (2) возможна неединственность оптимального управления, связанная со следующим фактом, который будет доказан в Приложении, п. П1. Для любого $i \in J$ существуют такое $\bar{a}_i \geq a_i^*$, что решение системы дифференциальных уравнений (6) таково, что $U_i(x)$ строго возрастают при $x > \bar{a}_i$; для тех i, для которых $\bar{a}_i > a_i^*$, справедливо равенство $a_i^* = 0$ и функции $U_i(x)$ постоянны на интервалах $[0,\ \bar{a}_i]$; для каждого i, для которого $\bar{a}_i > a_i^*$, существует такое l, $2 \leq l \leq r$, что $\bar{a}_i = a^{(l)}$, где числа $a^{(l)}$ и число r были определены в п. 3 теоремы 1.

Будем говорить, что управление в состоянии $i \in J$ является a_i-квазипороговым, если оно удовлетворяет следующим условиям.

Пусть в какой-то момент времени $t_0 \geq 0$ выполняется равенство $m(t_0) = i, \quad x(t_0) = x$, и пусть $t_0 + \tau$ — момент первого после t_0 скачка процесса $m(t)$.

Если $x > a_i$ и $t_0 < t < t_0 + \min(x - a_i, \tau)$, то так же, как для порогового управления $u(t) = u(t_0)$. Если $x > a_i$ и $x - a_i < t < t_0 + \tau$ или $x \leq a_i$ и $t_0 < t < t_0 + \tau$, то управление u таково, что $0 \leq x^u(t) \leq a_i$.

Пусть $\tilde{J} \subset J$. Назовем множеством $(a, \tilde{J})$-квазипороговых стратегий множество допустимых управлений, которые удовлетворяют следующему свойству: в состояниях $i \notin \tilde{J}$ они являются a_i-пороговыми, а в состояниях $i \in \tilde{J}$ они являются a_i-квазипороговыми.

Замечание 2. Всякая a'-пороговая стратегия такая, что $a_i' = a_i$ для $i \notin \tilde{J}$ и $0 \leq a_i' \leq \bar{a}_i$ для $i \in \tilde{J}$ принадлежит множеству $(a, \tilde{J})$-квазипороговых стратегий.

Теперь рассмотрим множество состояний из J_0, из которых можно попасть в состояния, принадлежащие J_+, только побывав в состояниях из J_-. Для этого положим[2]

$$J_0^{(1)} = \{i:\ i \in J_0 \quad \exists \Delta > 0:\ \ P[m(\Delta) \in J^+ \,|\, m(0) = i, \quad m(s) \notin J_- \quad \forall 0 \leq s \leq \Delta] = 0\}, \qquad (11)$$

$$I_0^{(1)} = J_0 \setminus J_0^{(1)}, \qquad J_+^{(1)} = J_+ \bigcup I_0^{(1)}. \qquad (12)$$

Замечание 3. Очевидно, что если соответствующая вероятность в (11) равна нулю для некоторого $\Delta > 0$, она равна нулю для любого $\Delta > 0$. Нетрудно понять, что при заданном i соответствующая вероятность равна нулю тогда и только тогда, когда $\lambda_{i,j} = 0$ для любого $j \in J_+^{(1)}$. В самом деле, множество $J_0^{(1)}$ строится с помощью следующего последовательного построения множества $I_0^{(1)}$. Сначала в $I_0^{(1)}$ включаются все те элементы $i \in J_0$, для которых существует такое $j \in J_+$, что $\lambda_{i,j} > 0$, затем все те элементы $i \in J_0$, для которых существует $\lambda_{i,j} > 0$ для j, включенных на предыдущем шаге, и т.д.

Теорема 2. *Если $J_0^{(1)} = \varnothing$, то в задаче оптимизации (2) оптимальное управление единственно, а если $J_0^{(1)} \neq \varnothing$, то существует, и притом единственный, набор $\bar{a}$ такой, что управление является оптимальным тогда и только тогда, когда оно принадлежит множеству $\left(\bar{a}, J_0^{(1)}\right)$-квазипороговых стратегий. При этом:*

а) если $i \in J_+^{(1)}$, то $\bar{a}_i = a_i^* = 0$, а если $i \in J_-$, то $\bar{a}_i = a_i^* > 0$ и оптимальное управление при таких i единственно и является a_i^*-пороговым;

[2] Наличие верхнего индекса (1) связано с тем, что в Приложении, п. П1, по аналогии будут определены множества $J_0^{(l)}$, $1 < 1 < r$.

б) если $i \in J_0^{(1)}$, то $a_i^* = 0$ и существует такое l, $2 \le l \le r$, что $\bar{a}_i = a^{(l)} > 0$, при этом если $\bar{a}_i > a^{(l)}$, то $\lambda_{i,j} = 0$ для любого $j \in J_+^{(l)} = \{i: \ \bar{a}_i \le a^{(l)}\}$;

в) для любого $i \in J$ справедливо: $U_i(x) = -P_i$ при $0 \le x \le \bar{a}_i$ и $U_i(x)$ строго возрастает при $x > \bar{a}_i$.

Доказательство теоремы 2 приводится в Приложении, п. П1. Там же формулируется основанный на п. б) теоремы 2 алгоритм последовательного построения множеств $I_0^{(l)} = \left\{i: \ i \in J_0, \ \bar{a}_i = a^{(l)}\right\}$. Тем самым находится вектор $\bar{a}$.

Сделаем два замечания о возможности неединственности.

Замечание 4. Покажем, что если $J_- = \varnothing$, то $J_0^{(1)} = \varnothing$. В самом деле, пусть $J_0^{(1)} \ne \varnothing$ и $i \in J_0^{(1)}$. Если $J_- = \varnothing$, то из замечания 3 следует, что $\lambda_{i,j} = 0$ для любого $j \notin J_0^{(1)}$, а поэтому $\lambda_i = \sum_{j \in J_0^{(1)},\, j \ne i} \lambda_{i,j}$. Поскольку $J_0^{(1)} \in J_0$, то $b_i = c + \rho P_i + \sum_{j \in J_0^{(1)},\, j \ne i} \lambda_{i,j}\left(P_i - P_j\right) = 0$ для любого $i \in J_0^{(1)}$. Для $i \in J_0^{(1)}$, при котором P_i принимает максимальное значение, в средней части нет отрицательных членов и получается противоречие.

Замечание 5. Очевидно, что существует такое $\hat{c}$, что при $c \ge \hat{c}$, $\rho = 0$ справедливо $J_- = \varnothing$ (а значит, $J_- = \varnothing$ для любого $\rho > 0$), а при $0 \le c < \hat{c}$, $\rho = 0$ множество J_- непусто. Если $0 \le c < \hat{c}$, то, во-первых, существует такое $\hat{\rho}(c) > 0$, что при $\rho \ge \hat{\rho}(c)$ справедливо $J_- = \varnothing$, а при $0 \le \rho < \hat{\rho}(c)$ множество J_- непусто, а, во-вторых, существует только конечное множество значений $\rho > 0$, для которых множество J_0 непусто. Отметим, что согласно замечанию 5, как правило, $J_0^{(1)} = \varnothing$, а в этом случае оптимальное управление единственно и является a^*-пороговой стратегией.

3. Некоторые свойства функций выигрыша и доказательство утверждений 1 и 2 теоремы 1

3.1. В этом пункте доказывается выпуклость функций выигрыша

Лемма 1. *Функции $V_i(x)$, $i \in J$ являются выпуклыми и непрерывными в нуле.*

Доказательство. Пусть u_1 – допустимое управление для начального состояния (i, x_1), u_2 – допустимое управление для (i, x_2). Тогда $u = \gamma u_1 + (1-\gamma) u_2$ является допустимым управлением для (i, x), где $x = \gamma x_1 + (1-\gamma) x_2$ и выполняется равенство $V_i^{\gamma u_1 + (1-\gamma) u_2}\left(\gamma x_1 + (1-\gamma) x_2\right) = \gamma V_i^{u_1}(x_1) + (1-\gamma) V_i^{u_2}(x_2)$. Отсюда следует, что

$$V_i\left(\gamma x_1 + (1-\gamma) x_2\right) \le \gamma V_i(x_1) + (1-\gamma) V_i(x_2).$$

Это доказывает выпуклость.

Для доказательства непрерывности в нуле рассмотрим управление $\bar{u}$, которое для начального состояния (δ, i) предписывает до момента δ не делать никаких закупок (так что $x^{\bar{u}}(\delta) = 0$), а потом в точке $(0, m(\delta))$ использовать ε-оптимальное управление. Устремляя δ и ε к нулю, получаем непрерывность в нуле. ■

Заметим, что из леммы 1 следует, что функции $V_i(x)$, $i \in J$ всюду непрерывны и всюду имеют правую производную $U_i(x) = dV_i(x)/dx$, $i \in J$.

3.2. Здесь доказывается, что достаточно ограничиться случаем $c = 0$

Лемма 2. *Для любого допустимого управления и справедливо равенство*

$$V_i^u(x) = \frac{c(\rho x - 1)}{\rho^2} + \tilde{V}_i^u(x), \tag{13}$$

где $\tilde{V}_i^u(x)$ соответствует параметрам $\tilde{c} = 0$, $\tilde{P}_i = P_i + c/\rho$, $i \in J$, при этом

$$\tilde{V}_i(x) \le \frac{P_1}{\rho} e^{-\rho x}. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку для допустимого управления оба интеграла в (2) конечны и $x^u(t) = x - t + u(t)$ (см. (1)), первое слагаемое под знаком математического ожидания в (2) можно проинтегрировать по частям:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} c x^u(t) dt = \int_0^\infty c(x-t)\mathrm{e}^{-\rho t}\, dt - \frac{1}{\rho}\int_0^\infty cu(t) d\,\mathrm{e}^{-\rho t} = c\frac{\rho x - 1}{\rho^2} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}\frac{c}{\rho} du(t).$$

В результате, для любого допустимого управления получаем (13). Для доказательства (14) рассмотрим управление $\bar{u}$, которое при $x > 0$ предписывает не делать никаких закупок, а при $x = 0$ – делать закупки с единичной интенсивностью. Тогда $\bar{u}(t) = 0$, $x^{\bar{u}}(t) = x - t$ при $0 \le t \le x$ и $\bar{u}(t) = t - x$, $x^{\bar{u}}(t) = 0$ при $t \ge x$. Для полученного управления условие (14) выполняется, а значит, оно выполняется и для $\tilde{V}_i^u(x)$. ■

В соответствии с леммой 2 при рассмотрении задачи без ограничения общности будем считать, что $c = 0$ (это существенно упрощает выкладки).

Из (14) и из выпуклости и положительности функций выигрыша следует, что при $c = 0$ они являются убывающими к нулю выпуклыми функциями.

Замечание 6. Из леммы 2 следует, что если управление оптимально в исходной задаче, то оно оптимально и в соответствующей задаче с $c = 0$, и наоборот.

3.3. В этом пункте для случая $c = 0$ выписывается уравнение оптимальности, в котором проводится оптимизация по допустимым управлениям до момента первого скачка марковского процесса, считая, что после этого получается оптимальное значение функционала. Впервые этот прием при решении задач управления марковскими цепями с непрерывным временем авторы использовали в (Пресман, Сонин, 1982). После вывода уравнения оптимальности мы показываем, что из него следует существование оптимальной пороговой стратегии.

Лемма 3. *Справедливо следующее уравнение оптимальности:*

$$V_i(x) = P_i\left(\frac{1}{\rho + \lambda_i} - x\right) + \inf_{y(\cdot)\in A(x)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\rho+\lambda_i)t} H_i(y(t))dt, \quad i \in J, \tag{15}$$

где

$$H_i(y) = P_i(\rho + \lambda_i)y + \sum\nolimits_{j\ne i,\, j\in J}\lambda_{i,j}V_j(y), \tag{16}$$

$A(x)$ является множеством допустимых детерминированных траекторий, т.е. таких $y(\cdot)$, что $y(t) = x - t + z(t) \ge 0$ для любого $t \ge 0$, где $z(\cdot)$ – непрерывная слева детерминированная неубывающая функция, $z(0) = 0$.

Доказательство. Пусть τ момент первого скачка процесса $m(t)$, $m(0) = i$. При $c = 0$ выражение под знаком математического ожидания в (2) можно переписать в виде:

$$\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\rho t}P_i du(t) + \mathrm{e}^{-\rho\tau}\int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-\rho(s-\tau)}P_{m(s)}du(s) = \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\rho t}P_i du(t) + \mathrm{e}^{-\rho\tau}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho s}P_{m(s+\tau)}du(s+\tau).$$

При $t < \tau$ функция $u(t)$ совпадает с некоторой детерминированной функцией $z(t)$, определенной для всех $0 \le t < \infty$. Согласно (1) соответствующая этой функции траектория имеет вид $y(t) = x - t + z(t)$. Зная, что в момент скачка цепь с вероятностью $\lambda_{i,j} / \lambda_i$ переходит в состояние j, и считая, что после первого скачка используется оптимальное управление, отсюда получаем уравнение оптимальности:

$$V_i(x) = \inf_{y(\cdot)\in A(x)} E_{i,\,x}\left\{\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\rho t}P_i dz(t) + \mathrm{e}^{-\rho\tau}\sum\nolimits_{j\ne i,\, j\in J}\frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_i}V_j(y(\tau))\right\}. \tag{17}$$

Заметим, что при выводе (17) нам нужно, чтобы управление было непрерывно слева, так как в этом случае значение $y(\tau)$ не зависит от того, в какое состо-

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

яние цепь попала в момент τ, в отличие от значения $x^u(\tau+0)$, которое зависит от того, производится ли в момент τ разовая закупка.

Если мы докажем, что в задаче (17) существует оптимальное управление, тем самым будет доказано существование оптимального управления в исходной задаче.

Момент τ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_i, поэтому:

$$E_{i,x}\left[\mathrm{e}^{-\rho\tau}V_j\left(y(\tau)\right)\right]=\int_0^\infty \lambda_i\,\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\left(\mathrm{e}^{-\rho t}V_j\left(y(t)\right)\right)dt=\lambda_i\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\rho+\lambda_i)t}V_j\left(y(t)\right)dt\ , \qquad (18)$$

$$E_{i,x}\left\{\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\rho t}\,dz(t)\right\}=\int_0^\infty \lambda_i\,\mathrm{e}^{-\lambda_i s}\left[\int_0^s \mathrm{e}^{-\rho t}\,dz(t)\right]ds=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\rho+\lambda_i)t}\,dz(t). \qquad (19)$$

Легко проверить, что из конечности правой части (19) следует, что $\mathrm{e}^{-(\rho+\lambda_i)t}z(t)\to 0$ при $t\to\infty$, а поэтому правую часть (19) можно проинтегрировать по частям:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\rho+\lambda_i)t}\,dz(t)=\mathrm{e}^{-(\rho+\lambda_i)t}z(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty z(t)\,d\,\mathrm{e}^{-(\rho+\lambda_i)t}\ =\ (\rho+\lambda_i)\int_0^\infty\left(y(t)-x+t\right)\mathrm{e}^{-(\rho+\lambda_i)t}\,dt. \quad (20)$$

Здесь при переходе ко второму равенству используется непрерывность слева функции $z(t)$, поскольку $z(0)=0$, а в нуле эта функция может иметь скачок, а также равенство $z(t)=y(t)-x+t$. Подставляя (20) в (19), а результат и (18) в (17), после элементарного интегрирования получаем уравнение (15). ■

Из результатов, полученных в п. 3.1 и 3.2, следует, что при каждом $i\in J$ функция $H_i(y)$ выпукла, конечна в нуле и линейно стремится к плюс бесконечности на бесконечности, а значит, достигает минимума. Отсюда следует, что если функция достигает минимума в одной точке a_i^*, то оптимальное управление до момента первого скачка марковского процесса единственно и является пороговым с порогом a_i^*, так как любая другая допустимая траектория дает большее значение функционала. Если минимум достигается на интервале $\left[a_i^*,\ \bar{a}_i\right]$, то оптимальным будет подмножество квазипороговых стратегий, для которых на интервале $\left[a_i^*,\ \bar{a}_i\right]$ можно использовать любое допустимое управление, не выводящее за пределы этого интервала, а на интервале $\left[0,\ a_i^*\right)$ нужно делать разовую закупку, чтобы перескочить в любую точку интервала $\left[a_i^*,\ \bar{a}_i\right]$. Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *a^*-пороговая стратегия всегда оптимальна.*

Тем самым доказан п. 1 теоремы 1. Из утверждения 1 следует, что для нахождения оптимального значения функционала достаточно ограничиться изучением пороговых стратегий. Такое изучение будет проводиться в п. 3.4, но сначала мы определим важные функции:

$$h_i(x)\ =\ \frac{dH_i(x)}{dx}\ =\ (\lambda_i+\rho)P_i\ +\sum\nolimits_{j\neq i}\lambda_{i,j}U_j(x),\, i\in J, \qquad (21)$$

где $U_i(x)$ – правая производная функции $V_i(x)$. Из выпуклости функций $V_i(x)$ следует, что $U_i(x)$ существуют при всех $x\geq 0$. Функции $h_i(x),\ \ i\in J$, тоже не убывают и

$$h_i(x)<0\ \text{ при }\ 0\leq x\leq a_i^*;\quad h_i(x)=0\ \text{ при }\ a_i^*\leq x<\bar{a}_i;\quad h_i(x)>0\ \text{ при }\ x>\bar{a}_i. \qquad (22)$$

Эти соотношения играют важную роль в дальнейшем изложении. Их можно рассматривать как определения величин a_i^* и $\bar{a}_i$.

3.4. В этом пункте доказывается, во-первых, непрерывная дифференцируемость функционалов, отвечающих произвольной пороговой стратегии, а, во-вторых, с использованием соотношения (22), утверждение (8) из теоремы 1.

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

Пусть a — произвольный набор порогов. Обозначим через $V_i(x,a)$ значение функционала (2), отвечающее a-пороговой стратегии, когда $x(0)=x$, $m(0)=i$. Как и в предыдущем пункте, мы рассматриваем случай $c=0$.

Лемма 4. *Функции* $V_i(x,a)$, $i\in J$ *непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют соотношениям:*

$$V_i(x,\ a)=(a_i-x)P_i+V_i(a_i,\ a),\, 0\le x\le a_i, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dx}V_i(x,\ a)=-(\rho+\lambda_i)V_i(x,\ a)+\sum\nolimits_{j\ne i}\lambda_{i,j}V_j(x,\ a),\, x>a_i, \tag{24}$$

$$0=P_i-(\rho+\lambda_i)V_i(a_i,\ a)+\sum\nolimits_{j\ne i}\lambda_{i,j}V_j(a_i,\ a). \tag{25}$$

Доказательство. Соотношение (23) следует из определения пороговой стратегии. При $x>a_i$ и при малом Δ по формуле полной вероятности для событий, которые могут произойти за время Δ, имеем:

$$V_i(x,a)=\mathrm{e}^{-\Delta\rho}(1-\Delta\lambda_i)V_i(x-\Delta,a)+\mathrm{e}^{-\Delta\rho}\sum\nolimits_{j\ne i}\lambda_{i,j}V_j(x,a)\Delta+o(\Delta),$$

а при $x=a_i$

$$V_i(a_i,a)=\mathrm{e}^{-\Delta\rho}(1-\Delta\lambda_i)\big(P_i\Delta+V_i(a_i,a)\big)+\mathrm{e}^{-\Delta\rho}\sum\nolimits_{j\ne i}\Delta\lambda_{i,j}V_j(x,a)+o(\Delta).$$

Устремляя в этих соотношениях Δ к нулю, получаем (24) и (25).

Из соотношений (23)–(25) следует, что правая производная функции $V_i(x,a)$ в точке a_i совпадает с левой производной, а значит, для любого набора порогов a функции $V_i(x,a)$, $i\in J$, всюду непрерывно дифференцируемы, при этом

$$\frac{dV_i(0,\ a)}{dx}\ =\ -P_i\quad \text{для любого}\ \ i\in J. \tag{26}$$

Из утверждения 1 следует, что $V_i(x)=V_i(x,a^*)$, $i\in J$, а значит, все функции $V_i(x)$, во-первых, непрерывно дифференцируемы, а, во-вторых, $U_i(0)= =dV_i(0)/dx=-P_i$ для любого $i\in J$. Отсюда и из определения (21) функций $h_i(x)$ следует, что эти функции непрерывны и что мы знаем значения $h_i(0)$, $i\in J$, а именно

$$h_i(0)=P_i-\sum_{j\ne i}\lambda_{i,j}P_j=\rho P_i+\sum_{j\ne i}\lambda_{i,j}\left(P_i-P_j\right),\, i\in J.\ \blacksquare \tag{27}$$

Замечание 7. В соответствии с п. 3.2 всюду, начиная с п. 3.3, мы могли бы рассматривать случай $\tilde{c}=0$, $\tilde{P}_i=P_i+\dfrac{c}{\rho}$, а вместо $V_i(x,a)$, $U_i(x,a)$, $b_i(x,a)$ и т.п. писать $\tilde{V}_i(x,a)$, $\tilde{U}_i(x,a)$, $\tilde{b}_i(x,a)$ и т.п. Тогда бы соотношение (27) приняло вид

$$\tilde{h}_i(0)=\rho\tilde{P}_i+\sum\nolimits_{j\ne i}\lambda_{i,j}\left(\tilde{P}_i-\tilde{P}_j\right)=c+\rho P_i+\sum\nolimits_{j\ne i}\lambda_{i,j}\left(P_i-P_j\right)=b_i, \tag{28}$$

где b_i определено в (4). Тем не менее, как правило, в обозначениях мы будем опускать символ «~». Надеемся, что это не вызовет недоразумений.

Из замечания 7 и соотношения (22) следует (8).

3.5. В этом пункте доказывается гладкость функции $U(x)$ и соотношения (6), (7) и (9) из теоремы 1. Положим

$$U_i(x,a)=\frac{dV_i(x,a)}{dx},\quad i\in J. \tag{29}$$

Функции $U_i(x,a)$ для $i\in J$ непрерывны и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$U_i(x,a)=-P_i,\quad x\le a_i, \tag{30}$$

$$\frac{dU_i(x,a)}{dx}=-(\rho+\lambda_i)U_i(x,a)+\sum\nolimits_{j\ne i}\lambda_{i,j}U_j(x,a)\ \text{ при }\ x>a_i. \tag{31}$$

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

Из (30)–(31) и непрерывности функций $U_i(x,a)$ следует, что вторая производная функции $V_i(x,\ a)$, равная $\frac{dU_i(x,a)}{dx}$, непрерывна всюду за исключением, быть может, точки a_i, в которой она может иметь разрыв величиной

$$(\rho+\lambda_i)P_i+\sum_{j\neq i}\lambda_{i,j}U_j(a_i,a), \tag{32}$$

так как левая производная в этой точке равна нулю.

Вернемся к порогам a^*. Для них соотношения (30)–(31) принимают вид:

$$U_i(x)=-P_i, \quad x\le a_i', \tag{33}$$

$$\frac{dU_i(x)}{dx}=-(\rho+\lambda_i)U_i(x)+\sum_{j№i}\lambda_{i,j}U_j(x) \text{ при } x>a_i^*, \tag{34}$$

при этом разрыв равен $(\rho+\lambda_i)P_i+\sum_{j\neq i}\lambda_{i,j}U_j(a_i)$. Сравнивая это выражение с определением функций $h_i(x)$ в (21) и определением значения a_i^* в (22), убеждаемся, что для функций выигрыша разрыв равен нулю, а значит, функции выигрыша $V_i(x),\ i\in J$, имеют вторую производную и в точках a_i^*, т.е. являются *дважды гладкими*. Именно из этого условия гладкого склеивания производных (а не самих функций выигрыша, как это обычно бывает в задачах управления диффузионными процессами) будут определяться пороги $a_i^*,\ \ i\in J$.

Рассмотрим вектор-функцию $b(x)=(\Lambda-\rho E)U(x)$, так что

$$b_i(x)=:-(\rho+\lambda_i)U_i(x)+\sum_{j\neq i}\lambda_{i,j}U_j(x),\ \ i\in J,\ \ x\ge 0. \tag{35}$$

Из (29)–(31) и определения функций $h_i(x)$ в (21), (22) следует, что

$$b_i(x)=\begin{cases}\dfrac{dU_i}{dx}(x)=\dfrac{d^2V_i}{dx^2}(x) & \text{при} \quad x>a_i;\\ h_i(x) & \text{при } 0\le x\le a_i.\end{cases} \tag{36}$$

Из (22) и (36) следует, что $b_i(x)=h_i(x)<0$ при $0\le x<a_i^*$, из определения a_i^* в (22) — что $b_i(a_i^*)=0$, а из выпуклости $V_i(x)$ — что $b_i(x)\ge 0$ при $x>a_i^*$, а поэтому с учетом замечания 7 соотношения (33) и (34) можно переписать в виде

$$\frac{d\tilde U(x)}{dx}=\max\left((\Lambda-\rho E)\tilde U(x),0\right),\quad \tilde U(0)=-\tilde P. \tag{37}$$

Из (14) вытекает, что $\tilde U(x)$ экспоненциально убывает, а поэтому

$$\tilde V(x)=-\int_x^\infty \tilde U(s)ds. \tag{38}$$

Подставляя в (37) и (38) выражение для $\tilde V(x)$ и $\tilde U(x)$ из (13) и используя то, что $\Lambda cI=\mathbf{0}$, получаем доказательство пункта 2 теоремы 1.

4. Алгоритм построения вектор-функции $U(x)$ и порогов a^*

Упорядочим координаты вектора a^* по возрастанию. Пороги для разных состояний могут совпадать, поэтому нам понадобятся:

– целое положительное число $r\le N$, равное числу разных порогов;

– набор строго возрастающих чисел $0=a^{(1)},\dots,a^{(r)}=a^m<\infty$, соответствующих значениям разных порогов;

– непересекающиеся наборы индексов $I^{(1)},\dots,I^{(r)}$ такие, что если $i\in I^{(l)}$, то $a_i^*=a^{(l)},\ \ l=1,\dots,r$.

Из (8) и замечания 1 следует, что $a_1^*=a^{(1)}=0$. Положим

$$J^{(l)}=\bigcup_{i=1}^{l}I^{(i)},\quad J_-^{(l)}=J\setminus J^{(l)},\quad l=1,\dots,r, \tag{39}$$

так что $J^{(l)}=\left\{i:\ a_i^*\le a^{(l)}\right\},\quad J^{(r)}=J$, и рассмотрим следующие матрицы и векторы:

$$A^{(l)}=\left(a_{i,j}^{(l)}\right)_{i,j\in J^{(l)}},\ a_{i,j}^{(l)}=\lambda_{i,j},\ i,j\in J^{(l)},\ i\ne j,\ a_{i,i}^{(l)}=-\left(\rho+\lambda_i\right),\ i\in J^{(l)},$$
$$C^{(l)}=\left(c_i^{(l)}\right)_{i\in J^{(l)}},\ \ c_i^{(l)}=-\sum\nolimits_{j\in J_-^{(l)}}\lambda_{i,j}P_j,\ i\in J^{(l)}.$$

Замечание 8. Из того что $A^{(l)}$ соответствует марковской цепи с множеством состояний $J^{(l)}$ и интенсивностью убывания в состоянии i, равной $\rho_i=\rho+\sum\nolimits_{j\notin J^{(l)}}\lambda_{1,j}$, следует существование обратной матрицы $\left(A^{(l)}\right)^{-1}$.

Замечание 9. В ситуации общего положения все отличные от нуля пороги однократны. На практике, как правило, пороги монотонно возрастают при убивании цены, но в рассматриваемой модели это не всегда верно. Так, в Приложении, п. П2 для $N=3$ будет показано, что если выполняется некоторое неравенство для комбинации параметров, то $0<a_2^*<a_3^*$, а если выполняется противоположное неравенство, то $0<a_3^*<a_2^*$.

Для того чтобы построить a^*, достаточно построить значения $a^{(l)}$ и найти множества $J^{(l)}$, $1\le l\le r$. Основным свойством, которое мы будем использовать для этих построений, является непрерывность функций $h_i(x),\ \ i\in J$ и соотношение (22), которое, как упоминалось, соответствует гладкому склеиванию функции $U_i(x)$ в точке a_i^* для всех $i\in J$.

Опишем шаги алгоритма. Пусть при некотором $l<r$ мы построили $a^{(i)}$ и $I^{(i)}$ при $1\le i\le l$, а также $U(x)$ при $0\le x\le a^{(l)}$. Заметим, что при $l=1$ это справедливо, поскольку, согласно теореме 1 (см. (8)), $I^{(1)}=J^{(1)}=J\setminus J_-$, а из (6) следует $U_i(0)=-P_i$ для всех $i\in J$.

Мы знаем, что в соответствии с (33) и (34) на интервале $a^{(l)}\le x\le a^{(l+1)}$ выполняются соотношения:

$$U_i(x)=-P_i,\quad i\in J_-^{(l)},\quad a^{(l)}\le x\le a^{(l+1)},\tag{40}$$
$$\frac{dU_i(x)}{dx}=\sum\nolimits_{j\in J^{(l)}}a_{i,j}U_j(x)-\sum\nolimits_{j\in J_-^{(l)}}\lambda_{i,j}P_j\ \text{для}\ i\in J_-^{(l)},\quad a^{(l)}\le x\le a^{(l+1)}.\tag{41}$$

Соотношение (41) является системой линейных дифференциальных уравнений с матрицей $A^{(l)}$, неоднородностью $C^{(l)}$ и начальным условием $U\left(a^{(l)}\right)$, которое, согласно сделанному предположению, нам известно.

Рассмотрим вектор-функцию столбец $U^{(l)}(x)$ с координатами $U_{+,i}^{(l)}(x), i\in J^{(l)}$, $U_{-,i}^{(l)}(x), i\in J_-^{(l)}$, определяемую формулой:

$$\begin{gathered}U_{-,i}^{(l)}(x)=-P_i,\ i\in J_-^{(l)},\ a^{(l)}\le x<\infty,\\ U_+^{(l)}(x)=\mathrm{e}^{A^{(l)}\left(x-a^{(l)}\right)}U\left(a^{(l)}\right)+\left(A^{(l)}\right)^{-1}\left(E^{(l)}-\mathrm{e}^{A^{(l)}\left(x-a^{(l)}\right)}\right)C^{(l)},\ a^{(l)}\le x<\infty,\end{gathered}\tag{42}$$

где $U^{(l)}\left(a^{(l)}\right)=U\left(a^{(l)}\right)$. Эта функция определена для всех $x>a^{(l)}$ и удовлетворяет соотношениям (40)–(41). Поскольку $U^{(l)}\left(a^{(l)}\right)=U\left(a^{(l)}\right)$, имеет место равенство

$$U^{(l)}(x)=U(x)\ \text{ при }\ a^{(l)}\le x\le a^{(l+1)}.\tag{43}$$

И хотя значение $a^{(l+1)}$ нам пока неизвестно, тем не менее, мы построили $U(x)$ на интервале $a^{(l)}\le x\le a^{(l+1)}$. Но если мы знаем $U(x)$ на этом интервале, мы знаем и $b(x)=(\Lambda-\rho E)U(x)$ (см. (35)).

Рассмотрим вектор-функцию

$$b^{(l)}(x)=(\Lambda-\rho E)U^{(l)}(x),\ \ a^{(l)}\le x<\infty.\tag{44}$$

Из первой строчки в (36), в силу выпуклости $V(x)$ следует, что $b_i(x)\ge 0$ для $i\in J^{(l)}$, а из второй строчки и из (22) следует, что $b_i(x)=h_i(x)<0$ при $a^{(l)}\le x<a^{(l+1)}$, а в точке $a^{(l+1)}$ хотя бы одна из функций $h_i(x),\ \ i\in J_-^{(l)}$ обращается в нуль.

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

Рассмотрим функцию

$$\hat{h}^{(l)}(x) = \max_{i \in J_-^{(l)}} b_i^{(l)}(x), \quad x \geq a^{(l)}. \tag{45}$$

Поскольку $U(x) = U^{(l)}(x)$ при $a^{(l)} \leq x \leq a^{(l+1)}$, а значит, $b(x) = b^{(l)}(x)$, то из сказанного выше следует, что $a^{(l+1)} = \inf\left\{x : \hat{h}^{(l)}(x) = 0\right\}$, $I^{(l+1)} = \left\{i : i \in J_-^{(l)},\ h_i^{(l)}\left(a^{(l+1)}\right) = 0\right\}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 2 (алгоритм построения вектор-функции $U(x)$ и порогов a^*). *Предположим, что при некотором $l < r$ мы построили $a^{(i)}$ и $I^{(i)}$ при $1 \leq i \leq l$, а также $U(x)$ при $0 \leq x \leq a^{(l)}$. Если $l < r$, то*

$$U_i(x) = U^{(l)}(x) \text{ при } a^{(l)} \leq x \leq a^{(l+1)}. \tag{46}$$

$$a^{(l+1)} = \inf\left\{x : \hat{h}^{(l)}(x) = 0\right\},\ I^{(l+1)} = \left\{i : i \in J_-^{(l)},\ h_i^{(l)}\left(a^{(l+1)}\right) = 0\right\}, \tag{47}$$

где $U^{(l)}(x)$, $b^{(l)}(x)$ *и* $\hat{h}^{(l)}(x)$ определены в (42), (44), (45).

Если $l = r$, то $a^{(l)} = a^m, C^{(l)} = 0$, а поэтому решение системы задается формулой (10). Отсюда следует справедливость п. 3 теоремы 1, что завершает доказательство этой теоремы.

5. Случай двух состояний

Рассматривается задача с оператором $\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ и параметрами $(c,\ \rho,\ P_1,\ P_2)$, где $P_1 > P_2$. Пусть P вектор-столбец с координатами $(P_1,\ P_2)$; I – вектор-столбец с координатами 1, 1. Согласно теореме 1 нужно найти решение уравнения

$$\frac{dU(x)}{dx} = \max\left((\Lambda - \rho E)U(x) + cI, \mathbf{0}\right) = \max\left((\Lambda - \rho E)\left(U(x) - \frac{c}{\rho}I\right), \mathbf{0}\right),\ U(0) = -P. \tag{48}$$

Положим $b(x) = (\Lambda - \rho E)U(x) + cI$, $b = b(0)$, так что $b_i = c + (\rho + \lambda_i)P_i - \lambda_i P_{3-i}$, $i = 1, 2$. Тогда $b_1 > 0$ и $a_1^* = 0$ при любых значениях параметров.

Если $b_2 \geq 0$, то в средней части (48) максимум достигается на первом члене. Поэтому $a_2 = 0$ и, решая соответствующее дифференциальное уравнение, имеем

$$U(x) - \frac{c}{\rho}I = \mathrm{e}^{(\Lambda - \rho E)x}\left(U(a_2) - \frac{c}{\rho}I\right) = \mathrm{e}^{(\Lambda - \rho E)x}\left(-P - \frac{c}{\rho}I\right). \tag{49}$$

Если $b_2 < 0$, то из (48) получаем, что существует такое $a_2 > 0$, что

$$U_2(x) = -P_2, \quad U_1(x) = -P_1 + \frac{b_1}{\rho + \lambda_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(\rho + \lambda_1)x}\right) \text{ при } 0 \leq x \leq a_2, \tag{50}$$

где a_2 определяется из условия

$$b_2(a_2) = c + (\rho + \lambda_2)P_2 - \lambda_2 U_1(a_2) = b_2 + \lambda_2 \frac{b_1}{\rho + \lambda_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(\rho + \lambda_1)a_2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$a_2 = -\frac{1}{\rho + \lambda_1}\ln\left(1 + \frac{(\rho + \lambda_1)b_2}{\lambda_2 b_1}\right), \quad U_1(a_2) = -P_1 - \frac{b_2}{\lambda_2} = -\frac{c + (\rho + \lambda_2)P_2}{\lambda_2}. \tag{51}$$

При $x \geq a_2$ для обоих случаев справедливо

$$U(x) - \frac{c}{\rho}I \ = \ \mathrm{e}^{(-\rho E)(x - a_2)}\left(\begin{pmatrix} U_1(a_2) \\ -P_2 \end{pmatrix} - \frac{c}{\rho}I\right). \tag{52}$$

Для случая двух состояний матрица $\mathrm{e}^{(\Lambda - \rho E)x}$ имеет следующий вид. Собственные числа матрицы $\Lambda - \rho E$ равны $-\rho$ и $-(\rho + \lambda_1 + \lambda_2)$. Собственному числу $-\rho$ отвечают собственные вектор-столбец I и вектор-строка $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_2, \lambda_1)$, описывающая стационарное распределение цепи, собственному числу $-(\rho+\lambda_1+\lambda_2)$ отвечают собственные вектор-столбец $\lambda^- = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ -\lambda_2\end{pmatrix}$ и вектор-строка $I^-=(1,-1)$.

Справедливо представление

$$e^{(\Lambda-\rho E)x} = e^{-\rho x} I\bar{\lambda} + e^{-(\rho+\lambda_1+\lambda_2)x}\lambda^- I^- = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left[e^{-\rho x}\begin{pmatrix}\lambda_2 & \lambda_1\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix} + e^{-(\rho+\lambda_1+\lambda_2)x}\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_1\\ -\lambda_2 & \lambda_2\end{pmatrix}\right]. \quad (53)$$

Таким образом, в обоих случаях при $x \ge a_2$ из (9), (53) и (52) имеем

$$V(x) = -\frac{c}{\rho^2}I + \frac{cx}{\rho}I - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left[\frac{e^{-\rho(x-a_2)}}{\rho}\begin{pmatrix}\lambda_2 & \lambda_1\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix} + \frac{e^{-(\rho+\lambda_1+\lambda_2)(x-a_2)}}{\rho+\lambda_1+\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_1\\ -\lambda_2 & \lambda_2\end{pmatrix}\right]\left(\begin{pmatrix}U_1(a_2)\\ -P_2\end{pmatrix} - \frac{c}{\rho}I\right) =$$

$$= c\frac{e^{-\rho(x-a_2)} - 1 + \rho x}{\rho^2}I + \frac{\lambda_2 P_1 + \min(b_2,0) + \lambda_1 P_2}{\lambda_1+\lambda_2} \times \frac{e^{-\rho(x-a_2)}}{\rho}I +$$

$$+ \frac{\lambda_2 P_1 + \min(b_2,0) - \lambda_1 P_2}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)(\rho+\lambda_1+\lambda_2)} e^{-(\rho+\lambda_1+\lambda_2)(x-a_2)}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ -\lambda_2\end{pmatrix}.$$

Если $a_2>0$, то, согласно (9) и (50), при $0 \le x \le a_2$

$$V(x) = P(a_2 - x) - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{b_1}{\rho+\lambda_1}\int_x^{a_2}\left(1 - e^{-(\rho+\lambda_1)s}\right)ds + V(a_2).$$

6. Заключение

В работе рассмотрена задача управления запасами, когда производитель, которому для производства нужно с постоянной интенсивностью потреблять промежуточный продукт (товар), покупает этот товар по цене, зависящей от значения марковского процесса с непрерывным временем, конечным числом состояний и известными интенсивностями переходов. Интенсивность платы за хранение постоянна. Плата пропорциональна количеству товара. Рассматривается задача с дисконтированными издержками. Доказано существование оптимальной пороговой стратегии. Показано, что, как правило, оптимальное управление единственно, а в случае неединственности описаны все возможные оптимальные управления. Приведен алгоритм построения оптимальных порогов и функций выигрыша.

Основные идеи и особенности результатов и доказательств были изложены в конце введения. Подход такого типа можно использовать и в других задачах оптимального управления марковской цепью с непрерывным временем, когда получить явные формулы для оптимального управления и функции выигрыша практически невозможно и необходимо разрабатывать алгоритмы их последовательного вычисления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П1. Доказательство теоремы 2 (описание всех возможных оптимальных управлений)

В п. 3.3 было показано, что отсутствие единственности оптимального управления в состоянии i возникает в случае, когда $a_i^* \ne \bar{a}_i$, где a_i^* и $\bar{a}_i$ определены в (21) и (22). Такая возможность появляется в случае, когда для $i \in J^{(l)}$ решением системы уравнений (41) служит константа. Поскольку нарушение постоянства решения дифференциального уравнения может происходить только на концах

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

интервала, отсюда сразу следует, что если $\bar{a}_i \neq a_i^*$, то $\bar{a}_i$ совпадает с каким-либо $a^{(l)} > 0$. Тем самым доказана первая часть пункта б) теоремы 2.

Теперь мы докажем пункт в) теоремы 2. Для этого сформулируем утверждение, относящееся к общим свойствам марковских цепей.

Рассмотрим при $t \geq t_0$ цепь Маркова η_t с убыванием, у которой конечное множество состояний $\bar{J}$, состоящее из l элементов. Пусть $B = (b_{i,j})$ – инфинитезимальный оператор этой цепи, где $b_{i,j} \geq 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \bar{J}$, $b_{i,i} = -b_i$, $b_i = \rho_i + \sum_{j \in \bar{J},\ j \neq i} b_{i,j}$, $\rho_i > 0$, $i \in \bar{J}$, ρ_i – интенсивность убивания в состоянии $i \in \bar{J}$.

Пусть задан l-мерный вектор f с неотрицательными координатами f_i, $i \in \bar{J}$, и пусть

$$\bar{J}_+ = \{i:\ f_i > 0\},\quad \bar{J}_0 = \{i:\ f_i = 0\},$$

$$\bar{J}_{0,+} = \{i:\ i \in \bar{J}_0,\ \exists t_1 > t_0:\ P[\eta_{t_1} \in \bar{J}_+ | \eta_{t_0} = i] > 0\},\quad \bar{J}_{0,0} = \bar{J}_0 \setminus \bar{J}_{0,+}.$$

Очевидно, что если для некоторого $t_1 > t_0$ соответствующая вероятность положительна, то она положительна для любого $t > t_0$.

Понятно, что если $i \in \bar{J}_{0,0}$, то $b_{i,j} = 0$ для любого $j \in \bar{J}_+ \bigcup \bar{J}_{0,+}$. Множество $\bar{J}_{0,+}$ строится точно так же, как в замечании 3 строилось множество $I_0^{(1)}$. Сначала в $\bar{J}_{0,+}$ включаются все те элементы $i \in \bar{J}_0$, для которых существует такое $j \in \bar{J}_+$, что $b_{i,j} > 0$, затем все те элементы $i \in \bar{J}_0$, для которых существует $b_{i,j} > 0$ для j, включенных на первом шаге, и т.д., пока не останется множество $\bar{J}_{0,0}$, для которого $b_{i,j} = 0$ для любого $j \in \bar{J}_+ \cup \bar{J}_{0,+}$.

Рассмотрим теперь l-мерную вектор-функцию $F(t)$, $t \geq t_0$, с координатами

$$F_i(t) = \mathrm{E}\left[f_{\eta_t} \middle| \eta_{t_0} = i\right] = \bar{\mathrm{E}}\left[f_{\eta_t} \exp\left\{-\int_0^t \rho_{\eta_s} ds\right\} \middle| \eta_{t_0} = i\right],\ 1 \leq i \leq l, \tag{54}$$

где $\bar{\mathrm{E}}$ – математическое ожидания для цепи без убивания. Поскольку вероятность до момента t остаться в начальном состоянии положительна, то справедливо следующее очевидное утверждение.

Утверждение П1.1. *$F_i(t) > 0$ для любого $t > t_0$ при $i \in \bar{J}_+ \cup \bar{J}_{0,+}$, и $F_i(t) \equiv 0$ для любого $t \geq t_0$ при $i \in \bar{J}_{0,0}$.*

Функция $F(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{dF(t)}{dt} = BF(t)$, $F(t_0) = f$. Если в качестве B взять $A^{(l)}$, в качестве t_0 взять $a^{(l)}$, а в качестве f взять $\frac{dU_+^{(l)}(a^{(l)})}{dx}$ из разд. 4, то получим, что функции $F(t)$ и $\frac{dU_+^{(l)}}{dx}(x)$ совпадают, а значит, согласно (43) при каждом l на интервале $\left[a^{(l)}, a^{(l+1)}\right]$ для функций $\frac{dU_+^{(l)}}{dx}(x)$ выполняется утверждение П1.1. Тем самым мы не только доказали пункт в) теоремы 2, но и вторую часть пункта б) теоремы 2, и показали, что по ходу построения функции $U^{(l)}(x)$ мы можем последовательно построить множества $I_0^{(l)} = \left\{i : i \in I_0,\ \bar{a}_i = a^{(l)}\right\}$. Покажем теперь, что из пункта в) теоремы 2 следует вторая часть пункта б) теоремы 2.

Если $a_i^* = a^{(l)} > 0$, то согласно пункту 1 теоремы 1 $i \in J_-$, а значит, согласно (24) $h_i(0) < 0$, $h_i(a_i^*) = 0$. Но тогда из (23) и пункта в) теоремы 1 вытекает, что существует такое j, что $\lambda_{i,j} > 0$, $\bar{a}_j < a^{(l)}$ и функция $U_j(x)$ строго возрастает при $x > \bar{a}_j$. Отсюда следует, что $h_i(x) > 0$ при $x > a_i^* = a^{(l)}$, а поэтому согласно (24) $\bar{a}_i = a_i^*$. Тем самым мы показали, что если $\bar{a}_i \neq a_i^*$, то $a_i^* = 0$ и $i \in J_0$.

Справедливость пункта а) теоремы 2 вытекает из теоремы 1 и рассуждений об оптимальной стратегии в п. 3.3.

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

Напомним теперь, что сначала в (5) мы определили множества $J_+ = \{i: \ b_i > 0\}$, $J_0 = \{i: \ b_i = 0\}$, $J_- = \{i: \ b_i < 0\}$, а затем множества $I^{(l)} = \{i: \ a_i^* = a^{(l)}\}$, $J^{(l)} = \{i: \ a_i^* \le a^{(l)}\}$, $1 \le l \le r$, где согласно теореме 1 $I^{(1)} = J_+ \cup J_0$, и, очевидно, $J^{(l+1)} = J^{(l)} \cup I^{(l+1)}$. Алгоритм последовательного построения порогов $a^{(l)}$ множеств $I^{(l)}$ и числа r сформулирован в утверждении 2. После этого мы определили множества

$$I_0^{(l)} = \{i: \ i \in I_0, \ \bar{a}_i = a^{(l)}\}, \ J_+^{(l)} = \{i: \ \bar{a}_i \le a^{(l)}\}, \ J_0^{(l)} = \{i: i \in J_0, \bar{a}_i > a^{(l)}\}, \ 1 \le l \le r,$$

где $I_0^{(1)}$ было построено в замечании 5. Отметим очевидные равенства:

$$J^{(l)} = J_+^{(l)} \cup J_0^{(l)}, \quad J_+^{(l+1)} = J_+^{(l)} \cup I^{(l+1)} \cup I_0^{(l+1)}.$$

Сформулируем теперь основанный на второй части пункта б) теоремы 2 алгоритм нахождения множеств $I_0^{(l)}$. Тем самым, в силу вышесказанного, будут найдены все остальные множества.

Утверждение П1.2 (алгоритм построения множеств $I_0^{(l)}$). *Пусть для некоторого $l < r$ построено множество $I_0^{(l)}$ (для $l = 1$ это сделано в замечании 3). Из пункта б) теоремы 2 следует, что для любого $i \in J_0^{(l)}$ справедливо: $\lambda_{i,j} = 0$ для любого $j \in J_+^{(l)}$. Для построения $I_0^{(l+1)}$ сначала включим в него те элементы $i \in J_0^{(l)}$, для которых существует такое $j \in I^{(l+1)}$, что $\lambda_{i,j} > 0$. Если это множество пусто, то пусто и множество $I_0^{(l+1)}$. В противном случае добавим к включенным в $I_0^{(l+1)}$ на первом этапе те элементы i из оставшихся в $J_0^{(l)}$ элементов, для которых существует такое j, включенное на первом этапе, что $\lambda_{i,j} > 0$. Если это множество пусто, то построение множества $I_0^{(l+1)}$ завершено. Если нет, то повторим процедуру, и т.д. В результате будет построено множество $I_0^{(l+1)}$.*

П2. Случай трех состояний[3]

П2.1. Пусть заданы оператор

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -(\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3}) & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} \\ \lambda_{2,1} & -(\lambda_{2,1} + \lambda_{2,3}) & \lambda_{2,3} \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & -(\lambda_{3,1} + \lambda_{3,2}) \end{pmatrix}$$

и величины $c \ge 0$, $\rho > 0$, $P_1 > P_2 > P_3 > 0$. Положим $\lambda_1 = \lambda_{1,2} + \lambda_{1,3}$, $\lambda_2 = \lambda_{2,1} + \lambda_{2,3}$, $\lambda_3 = \lambda_{3,1} + \lambda_{3,2}$. Как и ранее, мы будем рассматривать вектор-столбец P с координатами P_i, $i = 1, 2, 3$. Согласно теореме 1 нужно найти решение уравнения

$$\frac{dU(x)}{dx} = \max\big((\Lambda - \rho E)U(x) + cI, \mathbf{0}\big), \ U(0) = -P. \tag{55}$$

Положим $b(x) = (\Lambda - \rho E)U(x) + cI$, $b = b(0)$, так что $b_i = c + \rho P_i + \sum_{j \ne i} \lambda_{i,j}(P_i - P_j)$. Очевидно, что $b_1 > 0$. Покажем, что неединственность оптимальной стратегии может быть только для третьего состояния, и это будет тогда и только тогда, когда $b_2 < 0$, $b_3 = 0$, $\lambda_{3,1} = 0$. В самом деле, согласно теореме 2 нужно было бы рассмотреть еще случай $b_2 = 0$, $\lambda_{2,1} = 0$, но такой случай невозможен, поскольку если $\lambda_{2,1} = 0$, то $b_2 = c + \rho P_2 + \lambda_2(P_2 - P_3) > 0$.

В соответствии с теоремой 2 в случае неединственности (когда $J_0^{(1)} \ne \varnothing$) для первых двух состояний оптимальное управление единственно, а для третьего состояния оптимальным является семейство квазипороговых стратегий с $a_3^* = 0$, $\bar{a}_3 = a_2^* > 0$.

Таким образом, согласно теореме 1 существует 5 случаев.

I. $b_2 < 0$, $b_3 < 0$. В этом случае $a_1^* = 0$, $a_2^* > 0$, $a_3^* > 0$ и возможны три подслучая:

[3] Этот материал подготовлен Э.Л. Пресманом при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-68-47030 «Эконометрические и вероятностные методы для анализа финансовых рынков сложной структуры»).

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

а) $a_2^* < a_3^*$, б) $a_3^* < a_2^*$, в) $a_2^* = a_3^*$.

II. $b_2 < 0,\ \ b_3 = 0,\ \ \lambda_{3,1} = 0$. В этом случае $a_1^* = a_3^* = 0$ и $a_2^* = \bar{a}_3 > 0$ и $r = 2$.

III. $b_2 < 0$ и либо $b_3 > 0$, либо $b_3 = 0$ и $\lambda_{3,1} > 0$. В этом случае $a_1^* = a_3^* = 0,\ \ a_2^* > 0$.

IV. $b_2 \ge 0,\ \ b_3 < 0$. В этом случае $a_1^* = a_2^* = 0,\ \ a_3^* > 0$ и $r = 2$.

V. $b_2 \ge 0,\ \ b_3 \ge 0$. В этом случае $a_1^* = a_2^* = a_3^* = 0$.

В П2.2 будет показано, что выполняются следующие соотношения эквивалентности:

$$\text{Iа)} \Leftrightarrow \lambda_{3,1} b_2 > \lambda_{2,1} b_3; \qquad \text{Iб)} \Leftrightarrow \lambda_{3,1} b_2 < \lambda_{2,1} b_3; \qquad \text{Iв)} \Leftrightarrow \lambda_{3,1} b_2 = \lambda_{2,1} b_3. \tag{56}$$

Покажем теперь, что выполнение приведенных условий не зависит от $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{1,3}$ и что при фиксированных c, ρ, $P_1 > P_2 > P_3$, для любого из случаев II–V и подслучаев Iа), Iб), Iв) можно найти такие $\lambda_{2,1}$, $\lambda_{2,3}$, $\lambda_{3,1}$, $\lambda_{3,2}$, при которых этот случай выполняется. В самом деле, условия в Iа) эквивалентны справедливости двух неравенств

$$\frac{c + \rho P_2}{\lambda_{2,1}} + \frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{2,1}}\left(P_2 - P_3\right) < P_1 - P_2, \qquad \frac{c + \rho P_3}{\lambda_{3,1}} > \frac{c + \rho P_2}{\lambda_{2,1}} + \left(P_2 - P_3\right)\left(1 + \frac{\lambda_{3,2}}{\lambda_{3,1}} + \frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{2,1}}\right).$$

Если зафиксировать $\dfrac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{2,1}} < \dfrac{P_1 - P_2}{P_2 - P_3}$ и выбрать достаточно большое $\lambda_{2,1}$, то будет выполняться первое неравенство. Если при выбранных $\lambda_{2,1}$ и $\lambda_{2,3}$ зафиксировать $\lambda_{3,2} / \lambda_{3,1}$ и выбрать достаточно малое $\lambda_{3,1}$, будет выполняться второе неравенство. Условия в Iб) эквивалентны справедливости двух неравенств

$$\frac{c + \rho P_3}{\lambda_{3,1}} < \frac{\lambda_{3,2}}{\lambda_{3,1}}\left(P_2 - P_3\right) + \left(P_1 - P_3\right), \qquad \frac{c + \rho P_3}{\lambda_{3,1}} < \frac{c + \rho P_2}{\lambda_{2,1}} + \left(P_2 - P_3\right)\left(1 + \frac{\lambda_{3,2}}{\lambda_{3,1}} + \frac{\lambda_{2,3}}{\lambda_{2,1}}\right).$$

Если при заданных $\lambda_{2,1}$ и $\lambda_{2,3}$ зафиксировать $\lambda_{3,2} / \lambda_{3,1}$ и выбрать достаточно большое $\lambda_{3,1}$, будут выполняться оба неравенства.

Подбор $\lambda_{2,1}$, $\lambda_{2,3}$, $\lambda_{3,1}$, $\lambda_{3,2}$ для выполнения всех остальных условий проводится совершенно аналогично.

Опишем план дальнейшего изложения. В п. П2.2 рассматривается интервал $0 \le x \le \min\left(a_2^*, a_3^*\right)$, а в п. П2.3 — интервал $\min\left(a_2^*, a_3^*\right) \le x \le \max\left(a_2^*, a_3^*\right)$. Для каждого интервала, если он непуст, сначала находится вектор-функция $U(x)$ на этом интервале, а потом на первом интервале значение $\min\left(a_2^*, a_3^*\right)$, а на втором — значение $a^m = \max\left(a_2^*, a_3^*\right)$.

В п. П2.4 рассматривается интервал $x > a^m = \max\left(a_2^*, a_3^*\right)$. Сначала на этом интервале строится вектор-функция $U(x)$, а после интегрирования от x до ∞ — вектор-функция $V(x)$. Тем самым будет найдено и значение $V\left(a^m\right)$. После этого $V(x)$ при $0 \le x < a^m$ находится по формуле (9) с использованием уже найденных значений функции $U(x)$.

П2.2. Рассмотрим интервал $0 \le x \le a^{(2)} = \min\left[a_2^*,\ a_3^*\right] > 0$. Этот интервал непуст только в случае I. Из теоремы 1 следует, что в этом случае оптимальное управление единственно и задается порогами $a_1^* = 0,\ a_2^* > 0,\ a_3^* > 0$, и что на интервале $0 \le x \le a^{(2)} = \min\left[a_2^*,\ a_3^*\right]$ имеет место $U_2(x) \equiv -P_2,\ \ U_3(x) \equiv -P_3$, а функция $U_1(x)$ является решением уравнения

$$\frac{dU_1(x)}{dx} = -\left(\rho + \lambda_1\right)U_1(x) - \lambda_{1,2}P_2 - \lambda_{1,3}P_3 + c, \quad 0 \le x \le a^{(2)}, \quad U_1(0) = -P_1,$$

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

(57)

при этом $a^{(2)}$ находится из условий:

$$b_i(x) = c + (\rho+\lambda_i)P_i + \lambda_{i,1}U_1(x) - \lambda_{i,5-i}P_{5-i} < 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x < a^{(2)},\ i = 2,3,$$
$$\max\left[b_2(a^{(2)}), b_3(a^{(2)})\right] = 0. \tag{58}$$

Рассмотрим определенные при $0 \le x < \infty$ функции

$$U_1^{(1)}(x) = \frac{b_1}{\rho+\lambda_1}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\rho)x}\right) - P_1, \tag{59}$$

$$b_2^{(1)}(x) = \frac{1}{\lambda_{2,1}}\left(c + (\rho+\lambda_2)P_2 + \lambda_{2,1}U_1^{(1)}(x) - \lambda_{2,3}P_3\right) = \frac{b_2}{\lambda_{2,1}} + \frac{b_1}{\rho+\lambda_1}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\rho)x}\right),$$

$$b_3^{(1)}(x) = \frac{1}{\lambda_{3,1}}\left(c + (\rho+\lambda_3)P_3 + \lambda_{3,1}U_1^{(1)}(x) - \lambda_{3,2}P_2\right) = \frac{b_3}{\lambda_{3,1}} + \frac{b_1}{\rho+\lambda_1}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\rho)x}\right).$$

Функция $U_1^{(1)}(x)$ удовлетворяет соотношениям (57), а поэтому имеют место равенства

$$U_1^{(1)}(x) = U_1(x), \quad b_i^{(1)}(x) = \frac{b_i(x)}{\lambda_{i,1}}, \quad i = 2,3, \quad 0 \le x \le a^{(2)}. \tag{60}$$

Функция $b_2^{(1)}(x)$ возрастает от значения $\frac{b_2}{\lambda_{2,1}} < 0$ до значения

$$\frac{b_2}{\lambda_{2,1}} + \frac{b_1}{\rho+\lambda_1} = \frac{(\rho+\lambda_1+\lambda_{2,1})c + \rho(\rho+\lambda_1)P_2 + \rho\lambda_{3,1}P_2 + \lambda_{3,1}\lambda_{1,3}(P_2 - P_3)}{\lambda_{2,1}(\rho+\lambda_1)} > 0,$$

поэтому существует такое x_2, что $b_2^{(1)}(x_2) = 0$, где x_2 определяется из соотношения

$$\frac{b_1}{\rho+\lambda_1}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\rho)x_2}\right) = -\frac{b_2}{\lambda_{2,1}},$$

при этом, согласно (59) $U_1^{(1)}(x_2) = -P_1 - b_2 / \lambda_{2,1}$. Если $\lambda_{3,1}b_2 > \lambda_{2,1}b_3$, то $b_2^{(1)}(x) > b_3^{(1)}(x)$, а значит, $b_3^{(1)}(x) < 0$ при $0 \le x \le x_2$. Поэтому из (60) и (58) получаем, что имеет место случай Ia): $a_3^* > a_2^* = x_2$ и

$$a_2^* = -\frac{1}{\rho+\lambda_1}\ln\left(1 + \frac{(\rho+\lambda_1)b_2}{\lambda_{2,1}b_1}\right), \quad U_1(a_2^*) = -P_1 - \frac{b_2}{\lambda_{2,1}} = -\frac{c + (\rho+\lambda_2)P_2 - \lambda_{2,3}P_3}{\lambda_{2,1}}. \tag{61}$$

Если $\lambda_{3,1}b_2 < \lambda_{2,1}b_3$, то $b_2^{(1)}(x) < b_3^{(1)}(x)$, а поэтому существует такое $x_3 < x_2$, что $b_3^{(1)}(x) < 0$ при $0 \le x < x_3$, $b_3^{(1)}(x_3) = 0$. Отсюда и из (60) и (58) получаем, что имеет место случай Iб): $a_2^* > a_3^* = x_3$ и

$$a_3^* = -\frac{1}{\rho+\lambda_1}\ln\left(1 + \frac{(\rho+\lambda_1)b_3}{\lambda_{3,1}b_1}\right), \quad U_1(a_3^*) = -P_1 - \frac{b_3}{\lambda_{3,1}} = -\frac{c + (\rho+\lambda_3)P_3 - \lambda_{3,2}P_2}{\lambda_{3,1}}. \tag{62}$$

Если $\lambda_{3,1}b_2 = \lambda_{2,1}b_3$, то $b_2^{(1)}(x) = b_3^{(1)}(x)$, а поэтому $a_2^* = a_3^* = x_2 = x_3$ и можно пользоваться как (61), так и (62).

П2.3. Возьмем отрезок $\min\left[a_2^*, a_3^*\right] \le x \le \max\left[a_2^*, a_3^*\right]$. Этот отрезок непуст в случаях Ia), Ib), II, III и IV. Рассмотрим сначала одновременно случаи Ia) и III. Поскольку $b_3(a_2^*) < 0$, $b_2(a_2^*) \ge 0$, $b_1(a_2^*) > 0$, то из уравнения (55) следует, что на интервале $a_2^* \le x \le a_3^*$ справедливо равенство $U_3(x) \equiv -P_3$, а функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dU_1(x)}{dx} = -(\rho+\lambda_1)U_1(x) + \lambda_{1,2}U_2(x) - \lambda_{1,3}P_3 + c, \quad a_2^* \le x \le a_3^*,$$
$$\frac{dU_2(x)}{dx} = -(\rho+\lambda_2)U_2(x) + \lambda_{2,1}U_1(x) - \lambda_{2,3}P_3 + c, \quad a_2^* \le x \le a_3^*, \quad U_2(a_2^*) = -P_2, \tag{63}$$

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

при этом в случае III имеет место: $a_2^* = 0$, $U_1(a_2^*) = -P_1$, а в случае Ia) a_2^* и $U_1(a_2^*)$ задаются формулой (61). Значение a_3 находится из условий:

$$b_3(x) = c + (\rho + \lambda_3)P_3 + \lambda_{3,1}U_1(x) + \lambda_{3,2}U_2(x) < 0 \quad \text{при} \quad a_2^* \le x < a_3^*, \quad b_3(a_3^*) = 0. \qquad (64)$$

Пусть $A^{(2)} = \Lambda^{(2)} - \rho E^{(2)} = \begin{pmatrix} -(\rho + \lambda_1) & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & -(\rho + \lambda_2) \end{pmatrix}$. Обозначим через $\mu^\pm$ собственные числа матрицы $\Lambda^{(2)}$, так что

$$\mu^\pm = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}}}{2}. \qquad (65)$$

Положим

$$d = \lambda_1 + \mu^+ = -\lambda_2 - \mu^- = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}}}{2}, \qquad (66)$$

при этом $d > 0$, $\mu^+\mu^- = \lambda_1\lambda_2 - \lambda_{1,2}\lambda_{2,1} > 0$, $\mu^+ + \mu^- = -\lambda_1 - \lambda_2$, $\mu^- < \mu^+ < 0$. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{1,2} & -d \\ d & \lambda_{2,1} \end{pmatrix}.$$

Здесь первый столбец матрицы B является собственным вектором матрицы $\Lambda^{(2)}$, отвечающим собственному значению μ^+, а второй столбец — собственным вектором для собственного значения μ^-. Нетрудно проверить, что

$$e^{A^{(2)}y} = B^{-1}\begin{pmatrix} e^{y(\mu^+ - \rho)} & 0 \\ 0 & e^{y(\mu^- - \rho)} \end{pmatrix} B =$$

$$= \frac{1}{d^2 + \lambda_{1,2}\lambda_{2,1}}\left[e^{y(\mu^+ - \rho)}\begin{pmatrix} \lambda_{1,2}\lambda_{2,1} & d\lambda_{1,2} \\ d\lambda_{2,1} & d^2 \end{pmatrix} + e^{y(\mu^- - \rho)}\begin{pmatrix} d^2 & -d\lambda_{1,2} \\ -d\lambda_{2,1} & \lambda_{1,2}\lambda_{2,1} \end{pmatrix} \right].$$

Рассмотрим определенные при $a_2^* \le x < \infty$ функции

$$U^{(2)}(x) = \left(e^{A^{(2)}(x - a_2^*)} - E^{(2)} \right) \left(A^{(2)} \right)^{-1} \begin{pmatrix} c - \lambda_{1,3}P_3 \\ c - \lambda_{2,3}P_3 \end{pmatrix} + e^{A^{(2)}(x - a_2^*)} \begin{pmatrix} U_1(a_2^*) \\ U_2(a_2^*) \end{pmatrix}, \qquad (67)$$

$$b_3^{(2)}(x) = c + (\rho + \lambda_3)P_3 + \lambda_{3,1}U_1^{(2)}(x) + \lambda_{3,2}U_2^{(2)}(x).$$

Функция $U_1^{(2)}(x)$ удовлетворяет соотношениям (63), а поэтому имеют место равенства

$$U_1^{(2)}(x) = U_1(x), \quad b_3^{(2)}(x) = b_3(x), \quad a_2^* \le x \le a_3^*. \qquad (68)$$

Функция $b_3^{(2)}(x)$ возрастает от значения $b_3(a_2^*) < 0$ до значения

$$\frac{b_2}{\lambda_{2,1}} + \frac{b_1}{\rho + \lambda_1} = \frac{(\rho + \lambda_1 + \lambda_{2,1})c + \rho(\rho + \lambda_1)P_2 + \rho\lambda_{3,1}P_2 + \lambda_{3,1}\lambda_{1,3}(P_2 - P_3)}{\lambda_{2,1}(\rho + \lambda_1)} > 0,$$

поэтому существует такое x_3, что $b_3^{(2)}(x_3) = 0$. В результате, мы нашли $a^m = \max[a_2^*, a_3^*] = x_3$ и функцию $U(x)$ на интервале $\min[a_2^*, a_3^*] \le x \le \max[a_2^*, a_3^*]$.

Для случаев Iб) и IV нужно просто поменять местами индексы 2 и 3.

Случай II по форме не отличается от случая IV. Как и в IV, из $b_2(0) < 0$ следует, что на интервале $0 \le x < a_2^*$ имеет место равенство $U_2(x) \equiv -P_2$, а функции $U_1(x)$ и $U_3(x)$ удовлетворяют той же самой системе дифференциальных уравнений. Но, поскольку $\lambda_{3,1} = 0$, уравнение для $U_3(x)$ принимает вид

$$\frac{dU_3(x)}{dx} = -(\rho + \lambda_3)U_3(x) - \lambda_3 P_2 + c = b_3(x), \quad 0 \le x \le a_2^*, \quad U_3(0) = -P_3.$$

Журнал НЭА,
№ 2 (59), 2023,
с. 12–34

Так как $b_3(0)=0$, то $U_3(x)\equiv -P_3$, $\bar{a}_3=a_2^*$, а дифференциальное уравнение для $U_1(x)$ совпадает с (57). Поэтому для нахождения a_2^* и $U_1(a_2^*)$ можно воспользоваться (61).

П2.4. Поскольку мы уже нашли $U(x)$ при $0\le x\le \max\left[a_2^*,a_3^*\right]$ и значения a_2^*, a_3^*, то из (10) и (9) следует, что для нахождения $U(x)$ при $x>\max\left[a_2^*,a_3^*\right]=a^m$ и последующего нахождения $V(x)$ при $0\le x\le\infty$ достаточно построить матриц-функцию $e^{(\Lambda-\rho E)x}$. Нетрудно проверить, что

$$\det(\Lambda-\rho E)=-\rho\left[\rho^2+\rho(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)-(\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}+\lambda_{1,3}\lambda_{3,1}+\lambda_{2,3}\lambda_{3,2})\right],$$

поэтому собственные числа матрицы равны: $\mu_1=-\rho$,

$$\mu_\pm=-\frac{1}{2}(2\rho+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\pm\sqrt{\kappa}),\tag{69}$$

где

$$\kappa=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-4(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)+4(\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}+\lambda_{1,3}\lambda_{3,1}+\lambda_{2,3}\lambda_{3,2}),\tag{70}$$

при этом $Re(\mu_-)\le Re(\mu_+)<-\rho$. Поэтому собственные числа матрицы Λ равны $\gamma_1=0, \gamma_2=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\sqrt{\kappa})$, $\gamma_3=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\sqrt{\kappa})$.

Замечание. Если $\lambda_1=6,\ \lambda_2=8,\ \lambda_3=12,\ \lambda_{1,2}=6z,\ 0\le z\le 1,\ \lambda_{2,1}=7,\ \lambda_{3,1}=1$, то $\mu_\pm=-\rho-13\pm\sqrt{36z-30}$, т.е. при $5<6z\le 6$ корни действительные и отрицательные; при $6z=5$ — совпадающие, а при $0\le 6z<5$ — комплексные сопряженные.

Пусть $\kappa>0$, так что все корни действительные и различные. Покажем, что в этом случае существует такая обратимая матрица X, что

$$\Lambda-\rho E=X\begin{pmatrix}-\rho & 0 & 0\\ 0 & \mu_+ & 0\\ 0 & 0 & \mu_-\end{pmatrix}X^{-1}.\tag{71}$$

В самом деле, умножая (71) справа на X получаем, что столбцы матрицы X — это собственные вектор-столбцы матрицы Λ, отвечающие собственным числам $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$. Умножая (71) слева на X^{-1}, получаем, что строки матрицы X^{-1} — это соответствующие собственные вектор-строки матрицы Λ. Нахождение соответствующих собственных строк и столбцов является простой задачей решения системы линейных уравнений. В результате,

$$e^{(\Lambda-\rho E)x}=X\begin{pmatrix}e^{-\rho x} & 0 & 0\\ 0 & e^{(\mu_+)x} & 0\\ 0 & 0 & e^{(\mu_-)x}\end{pmatrix}X^{-1}.\tag{72}$$

В случае $\kappa=0$ второе собственное число двукратное, т.е. $\mu_+=\mu_-$, и имеет место представление

$$e^{(\Lambda-\rho E)x}=X\begin{pmatrix}e^{-\rho x} & 0 & 0\\ 0 & e^{(\mu_-)x} & xe^{(\mu_-)x}\\ 0 & 0 & e^{(\mu_-)x}\end{pmatrix}X^{-1}.\tag{73}$$

Умножая справа на X, дифференцируя по X и полагая $x=0$, убеждаемся, что в этом случае первые два столбца матрицы X (две строки матрицы X^{-1}) являются собственными векторами матрицы Λ, а третий столбец — присоединенным ко второму. Ситуация со строками матрицы X^{-1} аналогична. В случае $\kappa<0$ имеет место представление

Журнал НЭА, № 2 (59), 2023, с. 12–34

$$e^{(\Lambda-\rho E)x} = X\begin{pmatrix} e^{-\rho x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(Re(\mu_+))x}\cos\left(\sqrt{|\kappa|}\ x\right) & e^{(Re(\mu_+))x}\sin\left(\sqrt{|\kappa|}\ x\right) \\ 0 & -e^{(Re(\mu_+))x}\sin\left(\sqrt{|\kappa|}\ x\right) & e^{(Re(\mu_+))x}\cos\left(\sqrt{|\kappa|}\ x\right) \end{pmatrix}X^{-1}. \quad (74)$$

Умножая справа на x, дифференцируя по x и полагая $x=0$, сводим задачу нахождения столбцов матрицы X к простой задаче решения системы линейных уравнений. Аналогично со строками матрицы X^{-1}.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

Булинская Е.В., Соколова А.И. (2015). Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения. В сб.: *«Современные проблемы математики и механики»*. Т. 10 (3). С. 37–62. [**Bulinskaya E.V., Sokolova A.I.** (2015). Asymptotic behavior of some stochastic storage systems. In: "*Modern problems of mathematics and mechanics*", 10 (3), 37–62 (in Russian).]

Пресман Э.Л. (2021). Модель Сонина управления запасами с функционалом долговременного среднего. Неопубликованная рукопись. [**Presman E.L.** (2021). *Sonin's inventory model with long-run average cost functional.* Unpublished manuscript (in Russian).]

Пресман Э.Л., Сонин И.М. (1982). Последовательное управление по неполным данным. Байесовский подход. М.: Наука. 256 с. [**Presman E.L., Sonin I.M.** (1982). *Sequential control with incomplete information. Bayesian approach.* Moscow: Nauka. 256 p. (in Russian). (English publication: **Presman E.L., Sonin I.M.** (1990). *Sequential control with incomplete information: The Bayesian approach to many-armed bandit problems.* N.Y.: Academic Press. 266 p.)]

Arrow K.J., Harris T.E., Marschak J. (1951). Optimal inventory policy. *Econometrica* XIX, 250–272.

Bather J. (1966). A continuous time inventory model. *Journal of Applied Probability*, 3, 538–549.

Beyer D., Cheng F., Sethi S.P. (2010). *Markovian demand inventory models.* N.Y.: Springer-Verlag.

Browne S., Zipkin P. (1991). Inventory models with continuous stochastic demands. *The Annals of Applied Probability*, 1 (3), 419–435.

Darekar A., Reddy A. (2017). Cotton price forecasting in major producing states. *Economic Affairs*, 62, 3, 1–6.

Hill J. (2004). *A Markov-modulated acquisition strategy.* Phd thesis, UNCC.

Hill J., Sonin I. (2006). *An inventory optimization model with Markov modulated commodity prices.* Abstract, Intern. Conf. on Management Sciences, Univ.of Texas at Dallas.

Katehakis M., Sonin I. (2013). *A Markov chain modulated inventory model.* Abstracts of INFORMS Conference.

Presman E.L., Sethi S.P. (2006). Stochastic inventory models with continuous and poisson demands and discounted and average costs. *Production and Operations Management*, 15, 2, 279–293.

Presman E., Sethi S., Zhang Q. (1995). Optimal feedback production planning in a stochastic N-machine flowshop. *Automatica*, 31 (9), 1325–1332.

Rubalskiy G. (1972), Calculation of optimum parameters in an inventory control problem. *Eng. Cybern.* 10, 182–187.

Поступила в редакцию 14.08.2022

Received 14.08.2022

Журнал НЭА,
№ 2 (59), 2023,
с. 12–34

E.L. Presman
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow School of Economics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

I.M. Sonin
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; University of North Carolina at Charlotte, US

An inventory model where commodity prices depend on a continuous time Markov chain

Abstract. We present an inventory model where a manufacturer (firm) uses for “production” a “commodity” (resource), which is consumed with unit intensity. The price of the commodity follows a stochastic process, modelled by a continuous time Markov chain with a finite number of states and known transition rates. The firm can buy this commodity at the current price or use ``stored'' one. The storage cost is proportional to the storage level. The goal of the firm is to minimize the total discounted performance cost. We prove the existence of an optimal strategy, which is defined by a vector of levels specifying the minimal commodity amount to keep for a given price. This is so called the “threshold” strategy. We also describe all situations when such a strategy is not unique. We present an algorithm to find an optimal strategy and the corresponding value functions. In typical optimization problems in continuous time involving Bellman (optimality) equation, a smooth pasting of the first derivatives of the value functions is used. A special feature of our model is that, in contrast to such situations, we have to prove and to use the continuity of the second derivatives. The inventory model described in our paper may have broader interpretation when resources are replaced by assets, consumption by demand, and storage costs by opportunity costs or transaction costs.

Keywords: *inventory model, Markov chain, optimality equation.*

JEL Classification: C61, D25, D81.

For reference: **Presman E.L., Sonin I.M.** (2023). An inventory model where commodity prices depend on a continuous time Markov chain. *Journal of the New Economic Association*, 2 (59), 12–34.

DOI: 10.31737/22212264_2023_2_12-34

EDN: ATSQDH