Журнал НЭА, № 5 (57), 2022, с. 24–37

Д.С. Карабекян
НИУ ВШЭ, Москва

Об устойчивости результатов для правил агрегирования[1]

Аннотация. При передаче информации о предпочтениях участников голосования могут произойти искажения, которые приведут к изменению итогового выбора. Например, участник мог неверно понять инструкции и ошибиться при заполнении бюллетеня. При этом его мнение могло в данной ситуации оказаться решающим. Используя компьютерное моделирование, мы изучаем, как различные правила реагируют на такого рода искажения для случая 3–5 альтернатив. Один из результатов работы состоит в том, что в отличие от степени манипулируемости правил голосования наиболее устойчивым является одно из наименее информационно требовательных правил: пороговое, причем при росте числа альтернатив данный эффект становится все более значительным. Это связано с падением вероятности повлиять на выбор для таких правил при росте числа альтернатив. Также стоит отметить положительную связь между разрешимостью (средневзвешенным числом альтернатив в выборе) и устойчивостью правил голосования. При исследовании сразу по двум параметрам пороговое правило также является одним из лучших.

Ключевые слова: *правила агрегирования, правила голосования, манипулирование, устойчивость, разрешимость, пороговое правило.*

Классификация JEL: D71.

Для цитирования: **Карабекян Д.С.** (2022). Об устойчивости результатов для правил агрегирования // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 5 (57). С. 24–37. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-57-5-2

1. Введение

Правила агрегирования, частным случаем которых являются правила голосования, стараются включить информацию из всех критериев. Конечно, в каждом конкретном случае какой-то критерий не обязательно является решающим, т.е. изменения в ранжировании по данному критерию могут не влиять на итоговый выбор. Однако для любого разумного правила всегда существует такой профиль ранжирования, когда данный критерий становится решающим. Наличие возможности с помощью искажения ранжирования в одном критерии изменить итоговый выбор приводит к известному результату теоремы Гиббарда–Саттертуэйта: любое недиктаторское правило голосования для трех и более альтернатив является манипулируемым (Gibbard, 1973; Sattertwaite, 1975). Оценка степени манипулируемости существующих процедур агрегирования проводилась в ряде работ (Kelly, 1993; Aleskerov, Kurbanov, 1999; Favardin, Lepelley, 2006; Pritchard, Wilson, 2007; Veselova, 2016; Aleskerov et al., 2018a, 2018b). В каждой работе сравнивались разные правила в различных условиях (распределение профилей, тип манипулирования, отношение к множественному выбору), но в целом большинство работ сходится в том, что наилучшими с точки зрения манипулирования являются правила со сложными структурами, основанные на итеративном исключении альтернатив,— правила Нансона и Хара. Простые правила, использующие мало информации, в частности правило относительного большинства, демонстрировали высокую манипулируемость.

[1] Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Автор благодарит Ф.Т. Алескерова за ценные комментарии по работе, а также А.А. Иванова, В.И. Якубу и Ю.В. Зонтова за помощь в расчетах и визуализации данных компьютерного моделирования.

Журнал НЭА, № 5 (57), 2022, с. 24–37

В то же время искажение предпочтений не обязательно может происходить в результате манипулирования. Изменение в ранжировании может не соответствовать стимулам, задаваемым предпочтениями участника голосования, как в случае манипулирования. Искажение может происходить из-за ошибки при заполнении бюллетеня или, если ранжирование определяется оценками по какому-то критерию, — общей «зашумленностью» при оценивании.

В обоих случаях лучшим правилом в такой концепции является наиболее устойчивое к подобным ошибкам, так как оно не приводит к изменению итогового результата. Если агент не может повлиять на выбор даже в худшую для себя сторону, то его нет смысла подкупать и его ошибка не повлияет на результат.

Тема подкупа была введена в работах (Elkind, Faliszewski, Slinko 2009; Faliszewski, Hemaspaandra E., Hemaspaandra L., 2009) и в дальнейшем изучалась исследователями в области компьютерных наук в основном в разрезе сложности поиска подкупа для разных правил. При этом чаще всего рассматривается не любое изменение предпочтений, а в основном два типа подкупа — перестановка двух альтернатив в предпочтениях или повышение ранга одной из альтернатив.

Понятие устойчивости правил к случайным искажениям впервые упоминалось Калаи (Kalai 2010). В работе изучалась стабильность итогового ранжирования при случайном изменении предпочтений малой долей агентов. Другой подход использовался в работе (Procaccia, Rosenschein, Kaminka, 2007). Изучались случайные искажения в виде ошибки в ранжировании двух соседних альтернатив для известных правил принятия решений и определялась нижняя и верхняя граница их устойчивости. Данный подход был усилен в работе (Shockey, 2008), где рассматривались уже любые случайные искажения.

В этой работе мы предлагаем рассмотреть устойчивость к случайным искажениям широкого класса позиционных и мажоритарных правил голосования для случая 3–5 альтернатив, используя компьютерное моделирование.

2. Модель

Устойчивость профиля можно определить по-разному. В наиболее близких к нашей постановке работах (Procaccia, Rosenschein, Kaminka, 2007; Shockey, 2008) рассматривается *минимальная* по всем профилям доля устойчивых выборов при искажении. В данной работе мы рассмотрим *среднюю* по всем профилям долю устойчивых выборов. Определим ее формально. Пусть m — число альтернатив, а n — число агентов. Мы полагаем ошибку случайной, т.е. вместо искреннего предпочтения агент с равной вероятностью объявляет одно из $m!-1$ неискренних предпочтений. Пусть в профиле j и при ошибке агента i в s_{ij} случаях из $m!-1$ ошибок выбор для профиля по данному правилу не поменяется. Усредняя данное значение по всем агентам и по всем профилям, получаем следующий индекс:

$$S = \sum_{j=1}^{m!^n} \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \Big/ \left(m!^n\, n\left(m!-1\right)\right).$$

Фактически индекс S является вероятностью, что случайная ошибка одного агента в случайном профиле не повлияет на коллективный выбор. Чем выше данное значение, тем выше стабильность правила.

Отметим, что данный индекс совпадает с индексом I_1^0 из работы (Алескеров и др., 2009). Данный индекс являлся в этой работе частью группы индексов свободы манипулирования I_1. Однако, несмотря на свое название, он не привязан напрямую

Журнал НЭА, № 5 (57), 2022, с. 24–37

к манипулированию и единственный из этой группы индексов не зависит от вида расширенных предпочтений, которые там определялись. Очевидно, что ситуация, когда в результате искажения предпочтений выбор не изменился, заведомо является неманипулируемой. В общем случае класс неустойчивых правил шире класса манипулируемых. Можно сформулировать два утверждения.

Утверждение 1. *Любое манипулируемое правило является неустойчивым.*

Доказательство следует из определения манипулируемости. Правило является манипулируемым, если существует профиль, в котором какому-то агенту выгодно исказить свои предпочтения и добиться лучшего для себя исхода. Если такое же изменение произойдет случайно, а не намеренно, то оно также приведет к изменению выбора – как следствие данное правило будет неустойчивым.

Утверждение 2. *Любое правило, определенное на неограниченной области определения предпочтений, которое хотя бы для пары профилей назначает разный выбор, является неустойчивым.*

Доказательство. Возьмем профиль j. Для каждого профиля в силу неограниченности области определения предпочтений есть $(m!-1)n$ профилей, в которые можно перейти в результате случайной ошибки. Так как хотя бы для пары профилей имеется разный выбор для доказательства неустойчивости правила, нам необходимо показать, что можно перейти из одного в другой в результате только одной ошибки.

Пусть это не так, и у всех $(m!-1)n$ профилей выбор – такой же, как и в профиле j. Возьмем любой профиль среди этих $(m!-1)n$ и посмотрим на профили, в которые можно попасть путем случайной ошибки. Пусть и в них выбор такой же, как и в профиле j. Несложно показать, что не более чем за n шагов можно перейти из профиля j в любой другой, поочередно меняя предпочтения каждого агента. Таким образом, мы перебрали все профили и получили, что выбор оказался таким же, как и в профиле j, что противоречит условию. Таким образом, существует два профиля с разными выборами, в один из которых можно попасть вследствие одной случайной ошибки. По определению это означает, что профиль неустойчивый. ■

Если сравнивать утверждение 2 с теоремой Гиббарда–Саттертуэйта, то можно отметить, что диктаторское правило тоже является неустойчивым, так как и диктатор может ошибаться. Также утверждение 2 действует и для случая двух альтернатив (теорема Гиббарда–Саттертуэйта – от трех), а требование существования для каждой альтернативы профиля, когда она выбирается, в утверждении 2 ослаблено до требования существования только пары профилей с разными выборами.

Более широкий класс неустойчивых правил делает задачу поиска наиболее стабильных правил не менее актуальной, чем поиск наименее манипулируемых. В данной работе мы оцениваем индекс S для случаев, когда число альтернатив равно 3–5, а число агентов не превышает 100. Для случая 3–5 альтернатив индекс оценивается на случайной выборке в 1 млн профилей. Анализ производим для 20 правил из трех классов: позиционные, итеративные позиционные и мажоритарные, которые описаны в следующем разделе. Для анализа используются варианты правил из работ (Aleskerov, Kurbanov, 1999; Карабекян, 2012).

2.1. Позиционные правила

Журнал НЭА,
№ 5 (57), 2022,
с. 24–37

В данной группе правил выбор зависит от суммарных очков каждой альтернативы, которые определяются позицией альтернативы в каждом упорядочении. Число очков, которое получает альтернатива a, определяется по формуле $SC(a)=\sum_{i=1}^{m} sc_i p_i(a)$, где $p_i(a)$ — это число ранжирований, в которых альтернатива a занимает место i, а sc_i — элемент вектора очков sc, который отличается для каждого правила и описан ниже.

Правило относительного большинства (plurality rule): $sc=(1, 0, \ldots, 0)$. Выбираются альтернативы с наибольшим SC.

Правило Борда (Borda rule): $sc=(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$. Выбираются альтернативы с наибольшим SC.

Одобряющее голосование (approval): $q=2$, $sc=(1, 1, 0, \ldots, 0)$. Выбираются альтернативы с наибольшим SC. Для четырех и пяти альтернатив рассматривается вариант с $q=3$ и вектором $sc=(1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$.

Обратное правило относительного большинства (inverse plurality): $sc=(1, \ldots, 1, 0)$. Выбираются альтернативы с наибольшим SC. В общем случае совпадает с одобряющим голосованием для $q=m-1$.

2.2. Итеративные позиционные правила

Данная группа правил отличается тем, что поиск выбора требует итеративно изменять профиль и менять вектор sc.

Процедура Хара (правило передачи голосов) (Hare's procedure): $sc=(1, 0, \ldots, 0)$. Если существует альтернатива a такая, что $SC(a)>0{,}5n$, то она объявляется итоговым выбором. Иначе исключается альтернатива с минимальным SC, и процедура повторяется для того же sc и $m-1$ альтернативы, пока не останется одна альтернатива или у всех альтернатив будет одинаковый SC.

Процедура Кумбса (Coombs' procedure). Сначала рассматривается $sc=(1, 0, \ldots, 0)$. Если существует альтернатива a — такая, что $SC(a)>0{,}5n$, то она объявляется итоговым выбором. Иначе рассматривается $sc=(1,\ldots,1,0)$ и исключается альтернатива с минимальным SC. Затем процедура повторяется с таким же чередованием векторов и отбрасыванием, пока не останется одна альтернатива или у всех альтернатив будет одинаковый SC.

Процедура Нансона (Nanson's procedure): $sc=(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$. Рассчитывается среднее число очков всех альтернатив $\overline{SC}$. Исключаются все альтернативы, у которых $SC(\cdot)<\overline{SC}$. Затем процедура повторяется для меньшего числа альтернатив m и того же вектора, пока не останется одна альтернатива или у всех альтернатив будет одинаковый SC.

Процедура Болдуина (Inverse Borda's procedure). $sc=(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$. Отбрасываются альтернативы с минимальным SC. Затем процедура повторяется для меньшего числа альтернатив $m-1$ и того же вектора, пока не останется одна альтернатива или у всех альтернатив будет одинаковый SC.

Пороговое правило (threshold rule) (Aleskerov, Chistyakov, Kalyagin, 2010): $sc=(1, \ldots, 1, 0)$. Выбирается альтернатива с наибольшим SC. Если таких альтернатив несколько, то применяется вектор $sc=(1,\ldots,1,0,0)$ только для сравнения альтернатив с максимальным SC. Если несравнимость осталась, то вектор $sc=(1,\ldots,1,0,0,0)$ и так далее. Процедура останавливается, если альтернатива с наибольшим SC единственная либо перебрали все вектора sc.

Журнал НЭА,
№ 5 (57), 2022,
с. 24–37

2.3. Мажоритарные правила

Данная группа правил использует отношение большинства (мажоритарное). Пусть p_{ab} – число предпочтений, в которых a стоит выше b. Определим мажоритарное отношение следующим образом: $a \mu b \Leftrightarrow p_{ab} > p_{ba}$.

Процедура Блэка (Black's procedure). Определим победителя Кондорсе как альтернативу, которая побеждает любую другую при попарном сравнении, $CW \mu b \forall b$. Если альтернатива CW существует, то она объявляется победителем. Иначе используется правило Борда.

Минимальное доминирующее множество (minimal dominant set). Множество X является доминирующим, если любая альтернатива в этом множестве доминирует по мажоритарному отношению любую альтернативу извне. Доминирующее множество называется минимальным, если никакое другое доминирующее множество не является его подмножеством.

Минимальное недоминируемое множество (minimal undominated set). Множество X является недоминируемым, если не существует никаких альтернатив вне X, которые доминируют по мажоритарному отношению хоть одну альтернативу из X. Недоминируемое множество называется минимальным, если никакое другое недоминируемое множество не является его подмножеством. Если таких множеств несколько, то выбор является объединением.

Минимальное слабоустойчивое множество (minimal weakly stable set). Множество X является слабоустойчивым, если на каждую альтернативу вне X, которая доминирует по мажоритарному отношению хоть одну альтернативу из X, найдется другая альтернатива в X, которая ее доминирует. Слабоустойчивое множество называется минимальным, если никакое другое слабоустойчивое множество не является его подмножеством. Если таких множеств несколько, то выбор является объединением.

Правило Фишбурна (Fishburn rule). Построим верхний срез альтернативы x для мажоритарного отношения μ: $D(x) = \{y \in A : y \mu x\}$. Другими словами, это – множество альтернатив, которые лучше x по мажоритарному отношению. На основе верхних срезов строим следующее отношение: $x \gamma y \Leftrightarrow D(x) \subset D(y)$. Выбором является множество альтернатив, не доминируемых по γ.

Непокрытое множество I (uncovered set I). Построим нижний срез альтернативы x для мажоритарного отношения μ: $L(x) = \{y \in A : x \mu y\}$. Иными словами, это – множество альтернатив, которые хуже x по мажоритарному отношению. На основе нижних срезов построим следующее отношение: $x \delta y \Leftrightarrow L(x) \supset L(y)$. Выбором является множество альтернатив, не доминируемых по δ.

Непокрытое множество II (Uncovered set II). На основе верхних срезов строим следующее отношение: $x \varphi y \Leftrightarrow D(x) \subseteq D(y)$. Выбором является множество альтернатив, не доминируемых по φ.

Правило Ричелсона (Richelson rule). На основе нижних и верхних срезов строим следующее отношение:

$$x \sigma y \Leftrightarrow \left[L(x) \supseteq L(y) \cap D(x) \subseteq D(y) \cap \left[L(x) \supset L(y) \cup D(x) \subset D(y) \right] \right].$$

Это означает, что одновременно должно наблюдаться нестрогое вложение верхних и нижних срезов, но хотя бы одно из вложений должно быть строгим. Выбором является множество альтернатив, не доминируемых по σ.

Правило Коупленда I (Copeland rule I). Построим функцию $u(x) = |L(x)| - |D(x)|$, т.е. принимающую значения, равные разнице мощности между нижним и верхним

Журнал НЭА,
№ 5 (57), 2022,
с. 24–37

срезами. Выбором являются альтернативы, обеспечивающие максимальное значение функции.

Правило Коупленда II (Copeland rule II). Построим функцию $u(x)=|L(x)|$, т.е. принимающую значения, равные мощности нижнего среза. Выбором являются альтернативы, обеспечивающие максимальное значение функции.

Правило Коупленда III (Copeland rule III). Построим функцию $u(x)=|D(x)|$, т.е. принимающую значения, равные мощности верхнего среза. Выбором являются альтернативы, обеспечивающие минимальное значение функции.

3. Результаты

Для начала рассмотрим случай трех альтернатив. На рис. 1 и 2 даны распределения значений индекса *S* для порядковых и мажоритарных правил соответственно.

Данные по одобряющему голосованию $q = 2$ не приведены, так как для трех альтернатив данное правило совпадает с обратным правилом относительного большинства.

Можно отметить несколько фактов. Как и в работе (Алескеров и др., 2009), у правил в значении индекса видна цикличность. Это значит, что причина цикличности не в расширенных предпочтениях, которые вводились в той работе, а в самой природе правил, так как устойчивость не зависит от типов расширения и правил устранения несравнимости. Также данные моделирования позволяют отметить два факта: во-первых, с ростом числа агентов устойчивость растет, так как ошибка в одном предпочтении все меньше влияет на общий результат. Во-вторых, для четного числа агентов для большинства правил устойчивость в целом меньше.

Если рассматривать правила, то среди порядковых лучше всех проявляет себя пороговое правило для случая четного числа агентов. Для нечетного чуть выше становятся правила Хара, Нансона и Болдуина. Среди мажоритарных для

Рис. 1

Устойчивость порядковых правил для трех альтернатив

Журнал НЭА,
№ 5 (57), 2022,
с. 24–37

Рис. 2

Устойчивость мажоритарных правил для трех альтернатив

нечетного числа выделяется процедура Блэка, которая является комбинацией мажоритарных и порядковых правил. Для четного числа агентов наиболее устойчивым правилом среди мажоритарных является правило Коупленда 1.

На рис. 3–6 представлены результаты для четырех и пяти альтернатив. Как видно из представленных графиков, выводы для трех альтернатив подтверждаются и даже усиливаются: процедура Блэка и пороговое правило все чаще становятся наиболее устойчивыми. Объединить результаты по всем правилам можно в табл. 1.

Таблица 1

Максимально устойчивые правила

Число агентов	Три альтернативы		Четыре альтернативы		Пять альтернатив	
	правило	значение	правило	значение	правило	значение
3	Мажоритарные + Нансон + Болдуин	0,5222	Нансон	0,5056	Пороговое	0,4667
4	Пороговое	0,5019	Пороговое	0,5671	Пороговое	0,5377
5	Блэк	0,6250	Хара	0,6515	Хара	0,6225
6	Пороговое	0,6336	Пороговое	0,6457	Пороговое	0,6445
7	Хара	0,7197	Хара	0,6939	Пороговое	0,6725
8	Пороговое	0,6839	Пороговое	0,7006	Пороговое	0,6926
9	Блэк	0,7219	Пороговое	0,7182	Пороговое	0,7101
10	Пороговое	0,7100	Пороговое	0,7322	Пороговое	0,7263
11	Хара	0,7721	Хара	0,7529	Пороговое	0,7410
12	Пороговое	0,7463	Пороговое	0,7579	Пороговое	0,7525
13	Кумбс	0,7806	Пороговое	0,7682	Пороговое	0,7622
14	Пороговое	0,7662	Пороговое	0,7757	Пороговое	0,7708

Журнал НЭА, № 5 (57), 2022, с. 24–37

Окончание таблицы 1.

Число агентов	Три альтернативы		Четыре альтернативы		Пять альтернатив	
	правило	значение	правило	значение	правило	значение
15	Нансон	0,7842	Пороговое	0,7838	Пороговое	0,7788
16	Пороговое	0,7770	Пороговое	0,7919	Пороговое	0,7863
17	Хара	0,8116	Пороговое	0,7984	Пороговое	0,7932
18	Пороговое	0,7959	Пороговое	0,8038	Пороговое	0,7988
19	Кумбс	0,8163	Пороговое	0,8094	Пороговое	0,8041
20	Пороговое	0,8071	Пороговое	0,8146	Пороговое	0,8091
21	Нансон	0,8184	Пороговое	0,8196	Пороговое	0,8142
22	Пороговое	0,8127	Пороговое	0,8235	Пороговое	0,8182
23	Хара	0,8352	Пороговое	0,8275	Пороговое	0,8225
24	Пороговое	0,8247	Пороговое	0,8314	Пороговое	0,8261
25	Кумбс	0,8376	Пороговое	0,8349	Пороговое	0,8300
29	Хара	0,8508	Пороговое	0,8474	Пороговое	0,8423
30	Пороговое	0,8445	Пороговое	0,8499	Пороговое	0,8450
39	Нансон	0,8685	Пороговое	0,8688	Пороговое	0,8641
40	Пороговое	0,8651	Пороговое	0,8704	Пороговое	0,8662
49	Нансон	0,8828	Пороговое	0,8833	Пороговое	0,8791
50	Пороговое	0,8818	Пороговое	0,8844	Пороговое	0,8804
59	Нансон	0,8935	Пороговое	0,8937	Пороговое	0,8899
60	Пороговое	0,8924	Пороговое	0,8945	Пороговое	0,8908
69	Нансон	0,9020	Пороговое	0,9018	Пороговое	0,8982
70	Пороговое	0,9001	Пороговое	0,9027	Пороговое	0,8990
79	Нансон	0,9083	Пороговое	0,9086	Пороговое	0,9051
80	Пороговое	0,9078	Пороговое	0,9090	Пороговое	0,9057
89	Нансон	0,9139	Пороговое	0,9141	Пороговое	0,9104
90	Пороговое	0,9131	Пороговое	0,9142	Пороговое	0,9107
99	Нансон	0,9185	Пороговое	0,9186	Пороговое	0,9153
100	Пороговое	0,9173	Пороговое	0,9188	Пороговое	0,9154

Видно сильное доминирование порогового правила, особенно для большего числа альтернатив. Чтобы понять причины, нужно посмотреть на другой аспект правил – разрешимость. Разные правила в силу своей структуры могут давать разную долю множественного выбора. При этом такие ситуации, когда в выборе несколько альтернатив (например, в результате равенства очков для порядковых правил), являются наиболее чувствительными к ошибкам. Можно предположить, что меньшая доля множественного выбора приведет к большей устойчивости. Это также объясняет периодичность, которую мы видели на рис. 1–6. В работе (Алескеров и др., 2009) был введен индекс разрешимости, который определяется как средневзвешенное число альтернатив в итоговом выборе. Мы можем рассмотреть комбинацию разрешимости и устойчивости и посмотреть, как расположены правила в этих координатах. На рис. 7 расположены анализируемые правила для пяти альтернатив и 12 агентов соответственно.

«Идеальное правило» расположено в верхней левой точке – оно максимально устойчиво и всегда дает однозначный выбор. И хотя такого правила

Журнал НЭА,
№ 5 (57), 2022,
с. 24–37

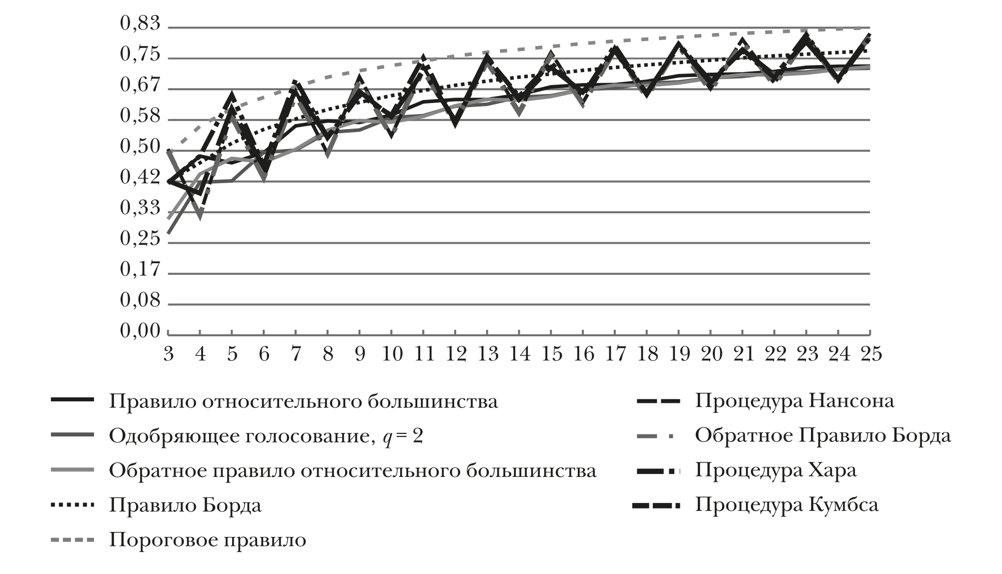

Рис. 3
Устойчивость порядковых правил для четырех альтернатив

Рис. 4
Устойчивость мажоритарных правил для четырех альтернатив

нет, согласно утверждению 2 можно отметить, что в целом чем выше разрешимость (средневзвешенное число альтернатив в выборе стремится к 1), тем выше и устойчивость. Пороговое правило отличается встроенной в него процедурой устранения несравнимости, что приводит к оценкам, близким к единице. Такая частая однозначность приводит и к большей стабильности. В данной постановке

Журнал НЭА,
№ 5 (57), 2022,
с. 24–37

Рис. 5
Устойчивость порядковых правил для пяти альтернатив

Рис. 6
Устойчивость мажоритарных правил для пяти альтернатив

мы можем поставить вопрос о Парето-эффективности, какие правила недоминируемые сразу по двум критериям. Результаты расчетов показаны в табл. 2, они наглядно демонстрируют, что пороговое правило почти всегда Парето-доминирует все остальные правила, за исключением ряда случаев для нечетного

Журнал НЭА, № 5 (57), 2022, с. 24–37

Рис. 7

Разрешимость и устойчивость правил для пяти альтернатив и 12 агентов

числа агентов, когда правила Хара и Кумбса показывают высокую разрешимость. Данные результаты ставят вопрос о поиске новых правил высокой разрешимости со встроенными механизмами устранения несравнимости.

Таблица 2

Недоминируемые правила по устойчивости и разрешимости

Число агентов	Три альтернативы	Четыре альтернативы	Пять альтернатив
3	Мажоритарные + Нансон, Болдуин	Блэк, Пороговое, Нансон	Пороговое
4	Пороговое	Минимальное доминирующее множество, пороговое	Пороговое
5	Блэк, пороговое	Хара	Пороговое, Хара
6	Пороговое	Пороговое	Пороговое
7	Хара	Хара	Пороговое, Хара
8	Пороговое	Пороговое	Пороговое
9	Блэк, пороговое, Нансон, Болдуин,	Пороговое	Пороговое
10	Пороговое	Пороговое	Пороговое
11	Хара	Хара	Пороговое, Хара
12	Пороговое	Пороговое	Пороговое
13	Кумбс	Пороговое, Кумбс	Пороговое, Хара
14	Пороговое	Пороговое	Пороговое
15	Пороговое, Нансон	Пороговое	Пороговое
16	Пороговое	Пороговое	Пороговое
17	Хара	Пороговое, Хара	Пороговое, Хара
18	Пороговое	Пороговое	Пороговое
19	Кумбс	Пороговое, Хара	Пороговое, Хара
20	Пороговое	Пороговое	Пороговое
21	Пороговое, Нансон, Болдуин	Пороговое	Пороговое

Журнал НЭА, № 5 (57), 2022, с. 24–37

Окончание таблицы 2.

Число агентов	Три альтернативы	Четыре альтернативы	Пять альтернатив
22	Пороговое	Пороговое	Пороговое
23	Хара	Пороговое, Хара	Пороговое, Хара
24	Пороговое	Пороговое	Пороговое
25	Кумбс	Пороговое, Кумбс	Пороговое
29	Хара	Пороговое, Хара	Пороговое, Хара
30	Пороговое	Пороговое	Пороговое
39	Пороговое, Нансон	Пороговое	Пороговое
40	Пороговое	Пороговое	Пороговое
49	Нансон, Болдуин, Кумбс	Пороговое, Кумбс	Пороговое, Кумбс
50	Пороговое	Пороговое	Пороговое
59	Нансон, Хара	Пороговое, Хара	Пороговое, Хара
60	Пороговое	Пороговое	Пороговое
69	Пороговое, Нансон	Пороговое	Пороговое
70	Пороговое	Пороговое	Пороговое
79	Пороговое, Нансон, Кумбс	Пороговое, Кумбс	Пороговое, Кумбс
80	Пороговое	Пороговое	Пороговое
89	Пороговое, Нансон, Хара	Пороговое, Хара	Пороговое, Хара
90	Пороговое	Пороговое	Пороговое
99	Пороговое, Нансон	Пороговое	Пороговое
100	Пороговое	Пороговое	Пороговое

ЛИТЕРАТУРА/REFERENCES

Алескеров Ф.Т., Карабекян Д.С., Санвер Р.М., Якуба В.И. (2009). Оценка степени манипулируемости известных схем агрегирования в условиях множественного выбора // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 1–2 С. 37–61. [**Aleskerov F.T., Karabekyan D.S., Sanver R.M., Yakuba V.I.** (2009). Evaluation of the degree of manipulability of known aggregation procedures under multiple choice. *Journal of the New Economic Association*, 1–2, 37–61 (in Russian).]

Карабекян Д.С. (2012). Манипулирование в задаче коллективного принятия решений. Дисс. канд. эконом. наук: защищена 24.05.2012: НИУ ВШЭ. Москва. Режим доступа: https://www.hse.ru/sci/diss/51729096 [**Karabekyan D.S.** (2012). *Manipulation in collective decision-making problem.* Abstract of Ph.D. of economy science. Moscow: HSE University. Available at: https://www.hse.ru/sci/diss/51729096 (in Russian).]

Aleskerov F., Chistyakov V.V., Kalyagin V. (2010). The threshold aggregation. *Economics Letters*, 107 (2), 261–262.

Aleskerov F., Ivanov A., Karabekyan D., Yakuba V. (2018a). Manipulability of majority relation-based collective decision rules. In: I. Czarnowski, R. Howlett, L. Jain (eds.). *Intelligent decision technologies 2017. IDT 2017. Smart Innovation, Systems and Technologies.* Vol. 72. Cham.: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-59421-7_8

Aleskerov F., Karabekyan D., Ivanov A., Yakuba V. (2018b). Individual manipulability of majoritarian rules for one-dimensional preferences. *Procedia Computer Science*, 139, 212–220.

Aleskerov F., Kurbanov E. (1999). Degree of manipulability of social choice procedures. In: *Current trends in economics*, 13–27. Berlin, Heidelberg: Springer.

Elkind E., Faliszewski P., Slinko A. (2009). Swap bribery. In: *International symposium on algorithmic game theory*, 299–310. Berlin, Heidelberg: Springer.

Faliszewski P., Hemaspaandra E., Hemaspaandra L.A. (2009). How hard is bribery in elections? *Journal of Artificial Intelligence Research*, 35, 485–532.

Favardin P., Lepelley D. (2006). Some further results on the manipulability of social choice rules. *Social Choice and Welfare*, 26 (3), 485–509.

Gibbard A. (1973). Manipulation of voting schemes. *Econometrica*, 41, 587–601.

Kalai G. (2010). Noise sensitivity and chaos in social choice theory. In: *Fete of combinatorics and computer science*, 173–212. Berlin, Heidelberg: Springer.

Kelly J.S. (1993). Almost all social choice rules are highly manipulable, but a few aren't. *Social Choice and Welfare*, 10 (2), 161–175.

Pritchard G., Wilson M.C. (2007). Exact results on manipulability of positional voting rules. *Social Choice and Welfare*, 29 (3), 487–513.

Procaccia A.D., Rosenschein J.S., Kaminka G.A. (2007). On the robustness of preference aggregation in noisy environments. In: *Proceedings of the 6th international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems*, 1–7. N.Y.: Association for Computing Machinery.

Satterthwaite M.A. (1975). Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10 (2), 187–217.

Shockey D.M. (2008). *A comparative study of the robustness of voting systems under various models of noise*. Rochester: Rochester Institute of Technology.

Veselova Y. (2016). The difference between manipulability indices in the IC and IANC models. *Social Choice and Welfare*, 46 (3), 609–638.

Поступила в редакцию 05.10.2022

Received 05.10.2022

Журнал НЭА,
№ 5 (57), 2022,
с. 24–37

D.S. Karabekyan
HSE University, Moscow, Russia

On the stability of results for aggregation procedures

Abstract. Some distortions are possible in the process of preference aggregation. For example, one voter who is pivotal for some preference profile may not read instructions properly and accidently submit wrong preference. We study how different voting rules react to these distortions for three, four and five alternatives with computer modelling. One of the results is: contrary to the results for the degree of manipulability estimations the most stable rule is the rule that requires less information from preferences when calculating final results – threshold rule. With more alternatives the difference between this rule and rules that require information about the whole ranking is more visible. So, for the rules that require less information the probability to influence the results goes down when the number of alternatives increases. Another result: the resoluteness (weighted average number of alternatives in the final outcome) is positively correlated with the stability of aggregation procedures. Threshold rule is the best one for the most cases when we consider both stability and resoluteness.

Keywords: *aggregation procedures, voting rules, manipulability, stability, resoluteness, threshold rule.*

JEL Classification: D71.

For reference: **Karabekyan D.S.** (2022). On the stability of results for aggregation procedures. *Journal of the New Economic Association*, 5 (57), 24–37. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-57-5-2