

А.А. Иванов
ИПУ РАН, НИУ ВШЭ, Москва

Алгоритмы расчета точных значений индексов манипулируемости для случая трех альтернатив¹

Аннотация. Манипулирование – ситуация, когда при голосовании один или несколько участников вписывают в бюллетень неискренние предпочтения, чтобы достичь лучшего для себя исхода голосования. Было доказано, что не существует диктаторской процедуры голосования, которая была бы неманипулируемой. Для поиска наименее манипулируемых правил голосования исследователи обычно используют два подхода. Первый – вывод формулы для конкретного индекса манипулируемости для конкретного правила. Ключевое ограничение – необходимость выводить формулу для каждого правила голосования и для каждого индекса. Второй – генерация случайных профилей для получения приближенной оценки индексов. Мы разработали алгоритм, позволяющий получить точные значения индексов манипулируемости для произвольного правила голосования для случая трех альтернатив. Приводится описание алгоритма, описание оптимизаций, оценка требуемой памяти и времени в сравнении с известными в литературе подходами, а также пример полученных результатов.

Ключевые слова: процедуры голосования, манипулирование, алгоритмы манипулируемости, коалиционное манипулирование.

Классификация JEL: D71, D72.

Для цитирования: **Иванов А.А.** (2022). Алгоритмы расчета точных значений индексов манипулируемости для случая трех альтернатив // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 5 (57). С. 14–23. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-57-5-1

Введение

Манипулирование – ситуация, которая возникает при голосовании, когда участник или группа участников записывают в бюллетень неискренние предпочтения, чтобы достичь лучшего для себя результата голосования.

В работах (Gibbard, 1973; Satterthwaite, 1975) было доказано, что не существует диктаторской неманипулируемой процедуры голосования. Позднее такой же вывод был показан (Duggan, Schwartz, 2000) и для случаев множественного выбора, т.е. для ситуаций, когда в процедуре голосования возможны ничьи между двумя и более альтернативами. После этого возник вопрос, если не существует неманипулируемых процедур голосования, то можно ли найти наименее манипулируемую процедуру голосования.

За последние десятилетия был опубликован ряд работ в области исследования процедур голосования на предмет манипулируемости. Такие работы затрагивали исследование как индивидуальной (Chamberlin, 1985; Aleskerov, Kurbanov, 1999), так и коалиционной манипулируемости (Xia, Conitzer, Procaccia, 2010). В работах по исследованию манипулируемости чаще всего используются два подхода. Первый – аналитический вывод формул. Для определенного правила голосования выводится формула для определенного индекса манипулируемости и определенного числа альтернатив. Ключевая проблема такого подхода состоит

¹ Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Автор благодарит Ф.Т. Алескерова за консультации при подготовке статьи.

в том, что для каждого правила, каждой модели и каждого индекса придется заново выводить свою формулу. Кроме того, если для скоринговых правил (правило относительного большинства, правило Борда и т.д.) вывод формул представляется возможным, то для более сложных правил, например основанных на мажоритарной матрице или для q -Паретовских правил, вывод формул представляется очень сложной аналитической задачей.

Второй подход – генерация случайного набора профилей и оценка на нем индексов манипулируемости. Несмотря на то что такая генерация позволяет добиться определенной точности, остается вопрос, если одно правило менее манипулируемо, чем другое, не может ли это являться причиной погрешности вследствие генерации лишь части профилей, а не их полного набора.

В этой работе мы представляем алгоритмы, позволяющие произвести расчет точных значений индексов манипулируемости для случая трех альтернатив для моделей Impartial Culture и Impartial Anonymous Culture. Мы приводим пример результатов для правила относительного большинства. Однако по таким же алгоритмам можно рассчитать за разумное время точные значения индексов и для любых других правил.

Модель манипулирования и основные обозначения

Мы рассматриваем модель, в которой n участников голосования выбирают среди m альтернатив. У каждого участника есть предпочтение, выраженное линейным порядком, на множестве альтернатив, т.е. одно из $m!$ предпочтений.

Профиль P – совокупность участников голосования и их предпочтений. Процедура голосования $C(P)$ ставит в соответствие заданному профилю результат процедуры голосования.

Если обозначить за P исходный профиль, а за P' – профиль, где манипулирующий участник или группа участников предъявили неискренние предпочтения, то манипулирование считается успешным, если $C(P') \succ C(P)$ – для манипулирующего участника или группы участников, где знак « \succ » означает, что результат $C(P')$ является более предпочтительным, чем $C(P)$.

Существует два подхода к тому, каким может быть результат голосования $C(P)$, – одиночный и множественный выбор. В рамках концепции одиночного выбора предполагается, что если между двумя или более альтернативами возникла ничья, то для определения победителя используется некоторый дополнительный механизм. Один из самых популярных вариантов – алфавитный (лексикографический) принцип устранения несравнимости. В результате при одиночном выборе процедура голосования дает на выходе одну альтернативу – победителя. Например, если альтернативы $\{a\}$ и $\{b\}$ набрали по четыре голоса и возникла ничья, то выбором будет $\{a\}$ – по алфавитному принципу.

В модели множественного выбора предполагается, что в случае возникновения ничьи между двумя или более альтернативами все такие альтернативы будут входить в результат коллективного выбора. Например, если альтернативы $\{a\}$ и $\{b\}$ набрали по четыре голоса, то выбором будет $\{a, b\}$. Иными словами, результатом процедуры голосования при множественном выборе может являться непустое подмножество множества альтернатив.

Таким образом, исходных предпочтений участника (например, $a \succ b \succ c$) может оказаться недостаточно для сравнения результатов процедуры голосования до и после манипулирования. Например, если до манипулирования результат был $\{b\}$, а после он стал $\{a, c\}$, то стал ли этот результат для участника лучше или хуже?

Что лучше, получить гарантированно вторую лучшую альтернативу или получить ничью между лучшей и худшей альтернативами?

Для ответа на этот вопрос в литературе используются расширенные предпочтения (Barbera, Bossert, Pattanaik, 2004; Aleskerov et al., 2011), которые являются линейным порядком на множестве всех возможных результатов процедуры агрегирования. Для случая трех альтернатив это – четыре метода построения расширенных предпочтений (при предположении, что исходные предпочтения участника $a \succ b \succ c$):

1) *лексимин* – результаты процедур агрегирования сравниваются лексикографически по наихудшей альтернативе. Выбор, у которого худшая альтернатива лучше, является более предпочтительным. Расширенные предпочтения лексимин (здесь и далее подчеркнуты множественные выборы, ранжирование которых различается в зависимости от расширенных предпочтений):

$$\{a\} \succ \{a, b\} \succ \{b\} \succ \{a, c\} \succ \{a, b, c\} \succ \{b, c\} \succ \{c\};$$

2) *лексимакс* – результаты процедур агрегирования сравниваются лексикографически по наилучшей альтернативе. Выбор, у которого лучшая альтернатива лучше, является более предпочтительным. Расширенные предпочтения лексимакс:

$$\{a\} \succ \{a, b\} \succ \{a, b, c\} \succ \{a, c\} \succ \{b\} \succ \{b, c\} \succ \{c\};$$

3) *рискофил* – результаты процедур агрегирования сравниваются по вероятности наилучшей альтернативы в выборе. Выбор, у которого вероятность наилучшей альтернативы в множестве выше, является более предпочтительным. Расширенные предпочтения рискофил:

$$\{a\} \succ \{a, b\} \succ \{a, c\} \succ \{a, b, c\} \succ \{b\} \succ \{b, c\} \succ \{c\};$$

4) *рискофоб* – результаты процедур агрегирования сравниваются по вероятности наихудшей альтернативы в выборе. Выбор, у которого вероятность наихудшей альтернативы в множестве ниже, является более предпочтительным. Расширенные предпочтения рискофоб:

$$\{a\} \succ \{a, b\} \succ \{b\} \succ \{a, b, c\} \succ \{a, c\} \succ \{b, c\} \succ \{c\}.$$

Таким образом, расширенные предпочтения позволяют сравнить все возможные результаты коллективного выбора. Например, если до манипулирования выбор был $\{b\}$, а после стал $\{a, c\}$, то при расширенных предпочтениях лексимакс и рискофил выбором будет успешное манипулирование, а при расширенных предпочтениях лексимин и рискофоб – неуспешное.

Манипулирование может осуществляться как одним участником, так и группой участников. Если манипулирует только один участник, – это индивидуальное манипулирование. Если манипулирует группа участников, – это коалиционное манипулирование.

Профиль считается манипулируемым, если существует хотя бы один участник или коалиция, которые могут провести успешное манипулирование. Профиль считается неманипулируемым, если не существует ни одной успешной попытки манипулирования.

Индексы манипулируемости

В литературе известно несколько индексов манипулируемости. Самый популярный – индекс Нитцана–Келли (NK-index). Он был введен в работах (Nitzan, 1985; Kelly, 1993). NK-index – доля манипулируемых профилей в общем числе профилей:

$NK = \text{число манипулируемых профилей} / \text{общее число профессий}$.

Алгоритм вычисления NK-index.

1. Для каждого профиля сгенерировать все возможные попытки манипулирования.

2. Если хотя бы одна попытка манипулирования является успешной, т.е. $C(P') > C(P)$ для манипулирующего участника или группы участников, согласно их расширенным предпочтениям, то профиль помечается как манипулируемый.

3. Если для профиля не существует ни одной успешной попытки манипулирования, то он помечается как неманипулируемый.

Позднее были введены и другие индексы манипулируемости. Например, в работе (Aleskerov, Kurbanov, 1999) были предложены индексы свободы манипулирования: индексы I_1^+ , I_1^0 и I_1^- .

Для их расчета классифицируем все возможные попытки манипулирования на три категории. Предположим, что всего существует p возможных попыток манипулирования. Тогда p попыток разделяются на:

1) успешные попытки манипулирования (p^+). Таковыми считаются такие изменения предпочтений, при которых результат после манипулирования стал лучше, чем был при записывании в бюллетень искренних предпочтений;

2) неуспешные попытки манипулирования, которые не изменяют результата процедуры агрегирования (p^0). Таковыми считаются попытки манипулирования, при которых результат после манипулирования остается таким же, каким был и до манипулирования;

3) неуспешные попытки манипулирования, которые ухудшают результат (p^-). Таковыми считаются попытки манипулирования, при которых результат после манипулирования стал хуже, чем был до манипулирования.

По определению, $p = p^+ + p^0 + p^-$. Далее мы рассчитываем индексы I_1^+ , I_1^0 и I_1^- как доли попыток, которые ведут к улучшению выбора, такому же выбору и худшему выбору соответственно:

$$I_1^+ = \frac{p^+}{p}; \quad I_1^0 = \frac{p^0}{p}; \quad I_1^- = \frac{p^-}{p}.$$

В сумме эти индексы дают $I_1^+ + I_1^0 + I_1^- = 1$.

Разработанные нами алгоритмы позволяют при необходимости рассчитать и другие индексы манипулируемости.

Вероятностные модели профилей и методы

Чему равны вероятности различных профилей? В литературе используются две наиболее популярные модели вероятностей профилей: Impartial Culture (IC) и Impartial Anonymous Culture (IAC).

В модели IC предпочтения участников равновероятны. Для случая n участников и m альтернатив у каждого участника возможно одно из $m!$ предпочтений, – значит, общее число профилей равно $(m!)^n$.

Можно заметить, что число профилей для случая ИС растет очень быстро. Для случая трех альтернатив и 100 участников будет всего 6.5×10^{77} различных профилей. Генерация такого числа профилей, очевидно, невозможна даже на современных суперкомпьютерах.

В модели ИАС предполагается, что профили равновероятны с учетом анонимности, т.е. два профиля считаются одинаковыми, если их можно получить переименованием участников. В модели ИАС «единогласные профили», т.е. профили, когда все участники имеют одинаковые или почти одинаковые предпочтения, будут более вероятны, чем в модели ИС.

Число профилей в модели ИАС для случая n участников и m альтернатив равно C_{m+n-1}^n . Для случая $n = 100$ и $m = 3$ общее число профилей в ИАС составит 96,5 млн. Такое число профилей можно сгенерировать на современной ЭВМ, равно как и профили для случаев меньшего числа участников.

Мы разработали алгоритмы для расчета точных значений индексов манипулируемости как для модели ИАС, так и для модели ИС. Механизм расчетов для модели ИС, для которой невозможно сгенерировать все возможные профили, строится на генерации всех профилей для модели ИАС с дальнейшим пересчетом числа таких профилей в модели ИС и домножением на соответствующие коэффициенты.

Теорема. Пусть профиль P состоит из $p_1 \dots p_6$ участников ($p_1 + \dots + p_6 = n$) с каждым из $3! = 6$ различных предпочтений, где p_1 – число участников с предпочтениями $a > b > c$, ..., p_6 – число участников с предпочтениями $c > b > a$. Тогда для каждого такого профиля из модели ИАС будет существовать $n! / (p_1! p_2! p_3! p_4! p_5! p_6!)$ профилей в модели ИС.

Доказательство. По определению, если модель ИАС предполагает, что два профиля, которые могут быть получены переименованием участников, являются эквивалентными, то в модели ИС профили, полученные переименованием участников, будут считаться разными профилями. Если заданы число участников $p_1 \dots p_6$ с различными предпочтениями, то в модели ИАС такой ситуации будет соответствовать ровно один профиль, так как все остальные будут эквивалентны из-за возможности переименовать участников. Сколько различных профилей может быть в модели ИС с числом участников $p_1 \dots p_6$? Ответ – все возможные перестановки n участников. Однако так как участники с одинаковыми предпочтениями считаются эквивалентными, их число будет равно числу перестановок с повторениями, т.е. $n! / (p_1! p_2! p_3! p_4! p_5! p_6!)$.

Тогда при расчетах мы можем сначала для каждого сгенерированного профиля в модели ИАС рассчитать индексы манипулируемости, затем посчитать по формуле число таких профилей в модели ИС и получить значение индексов манипулируемости для модели ИС.

Таким образом, механизм расчета для моделей ИС и ИАС следующий:

- 1) генерируем все возможные профили (от 56 – для случая трех участников до 96,5 млн – для случая 100 участников) для модели ИАС;
- 2) для каждого профиля проверяем, является ли он манипулируемым;
- 3) считаем индексы манипулирования для модели ИАС;
- 4) умножаем индексы для этого профиля на число таких профилей в модели ИС, чтобы получить индексы манипулирования для модели ИС.

В результате, генерируя все возможные профили для случая ИАС, мы делаем необходимый пересчет числа таких профилей в модели ИС, чтобы получить точные значения индексов манипулируемости для обеих вероятностных моделей – ИАС и ИС.

Схема расчетов

Стандартный механизм расчета манипулируемости состоит из генерации профилей и их проверки на манипулируемость (например, (Иванов, 2020)):

- 1) генерация профилей;
- 2) для каждого профиля – генерация всех возможных попыток манипулирования, т.е. всех возможных изменений предпочтений манипулирующим участником или группой участников;
- 3) подсчет нового результата коллективного выбора для каждой попытки манипулирования;
- 4) расчет индексов I_1 на основе этих результатов (стал ли новый выбор лучше, таким же или хуже для манипулирующего участника или коалиции);
- 5) расчет индекса НК: если хотя бы одна попытка манипулирования привела к лучшему результату, то профиль считается манипулируемым, и неманипулируемым – в противном случае.

При таком подходе возникают две проблемы.

Первая – число профилей. Для случая IC их число равно $(m!)^n$, поэтому в предыдущих исследованиях в этой области, например в (Aleskerov et al., 2011), генерируются не все профили, а 1 млн случайных профилей. Мы же генерируем все возможные профили для случая IAC, затем домножаем на их число в модели IC, получая тем самым генерацию всех возможных профилей и точные результаты индексов.

Вторая проблема – высокая вычислительная сложность проверки всех профилей на манипулируемость. На третьем шаге требуется посчитать новый результат коллективного выбора для каждой возможной попытки манипулирования. Как следствие – вычислительная сложность равна числу всех профилей, умноженному на число всех возможных попыток манипулирования и на алгоритмическую сложность вычисления результата процедуры голосования для профиля. В (Иванов, 2020) была показана оценка сложности для метода с генерацией 1 млн случайных профилей; для случая трех альтернатив и 100 участников время работы алгоритма составляло 63 часа. Если предположить, что расчеты производились для 96,5 млн профилей (общее число профилей в модели IAC для случая 100 участников), то расчет только одного случая со 100 участниками занял бы более 6000 часов (более 8 месяцев).

Далее используется важное наблюдение, позволяющее снизить сложность расчетов. Идея состоит в том, что при прямолинейном подходе, когда для каждого профиля P генерируются все возможные попытки манипулирования и для всех возможных профилей P' (с неискренними предпочтениями) производятся подсчеты нового результата процедуры $C(P')$, многие расчеты повторяются. Вычисление $C(P')$ может происходить для профилей, для которых результат процедуры голосования на этих профилях уже считался ранее.

Мы достигаем оптимизации, за счет того что результат процедуры голосования считается на каждом профиле только один раз. Для этого мы разделяем процесс вычислений на два этапа. В рамках первого этапа мы генерируем все возможные профили и считаем выбор для каждого правила на этом профиле. Вычислительная сложность данного этапа равна числу профилей (C_{m+n-1}^n) , умноженному на вычислительную сложность процедуры голосования.

В рамках второго этапа мы производим перебор всех возможных попыток манипулирования в каждом профиле. Ключевая идея здесь состоит в том, что на

втором этапе нам не приходится каждый раз пересчитывать результат правила голосования, — мы берем его из посчитанного один раз массива данных.

Если предположить, что в каждом профиле есть p' возможных попыток манипулирования, а вычислительная сложность правила составляет t операций, то прямолинейная модель расчетов предполагает сложность $C_{m^{l+n-1}}^n p' t$ операций (соответствует 6000 часов — по оценкам выше), а модель с разделением вычислений на два этапа предполагает сложность первого этапа в $C_{m^{l+n-1}}^n t$ (подсчет результатов правила голосования для всех профилей) и второго этапа в $C_{m^{l+n-1}}^n p'$ (просчет всех возможных попыток манипулирования), т.е. суммарно получается не $C_{m^{l+n-1}}^n p' t$ операций, а $C_{m^{l+n-1}}^n t + C_{m^{l+n-1}}^n p' = C_{m^{l+n-1}}^n (t + p')$. Поскольку и вычислительная сложность правила (t), и число попыток манипулирования в профиле (p') могут оказаться большими числами, например для случая многораундовых правил и коалиционного манипулирования, эта оптимизация имеет большое значение, но, как минимум, на два порядка повышает скорость расчетов.

Однако используемый метод является более затратным с точки зрения использования памяти. На первом этапе расчетов генерируются все возможные $C_{m^{l+n-1}}^n$ профилей, для каждого профиля высчитывается результат коллективного выбора по каждой процедуре, и результаты сохраняются в памяти. Суммарный размер полученных файлов для случаев от 3 до 100 участников и для разных процедур голосования составляет примерно 260 ГБ.

На втором этапе этот массив данных используется как входные параметры. Программа считывает все профили для заданного числа участников, после чего производится расчет индексов манипулируемости. За счет посчитанных заранее результатов коллективного выбора для каждого профиля на этом этапе после генерации каждой попытки манипулирования можно мгновенно получить новый коллективный выбор для профиля с неискренними предпочтениями и также мгновенно определять, стал ли выбор при попытке манипулирования лучше или хуже.

Отметим, что максимальная нагрузка на память программы составляет не более 700 МБ: для максимального случая (100 участников) нужно хранить в памяти данные о 96,5 млн профилей, для каждого профиля — хранится сам профиль (6 байт) и результат правила коллективного выбора по данному профилю (1 байт), т.е. $96,5 \text{ млн} \times 7 \text{ байт} = 675,5 \text{ МБ}$. Здесь возможна и дополнительная оптимизация при хранении данных в памяти, например, хранить результат коллективного выбора не как 1 байт, а как 3 бита, однако поскольку для современных ЭВМ размер памяти в 700 МБ не является проблемой, мы реализовали хранение в виде более простого подхода, где один параметр хранится в ячейке в один байт.

Результаты

Разработанные алгоритмы позволяют получить точные значения индексов манипулируемости для случая трех альтернатив. Мы провели расчеты для случаев от 3 до 100 участников для различных процедур голосования для четырех типов расширенных предпочтений (РП): лексимин, лексимакс, рискофил и рискофоб для случая ИАС.

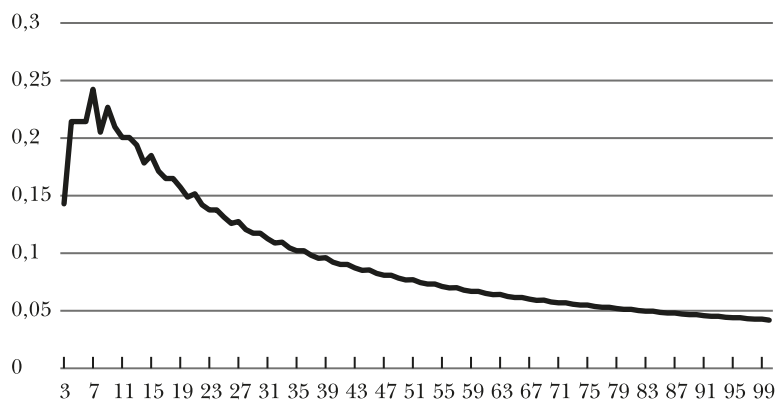


Рис. 1

НК-индекс для правила относительного большинства, РП лексимин

Ниже для иллюстрации результатов мы приводим пример результатов для самого известного правила голосования — правила относительного большинства — для случая индивидуального манипулирования (рис. 1).

Начиная с определенного числа участников, степень манипулируемости начинает снижаться. Это соответствует известным в литературе результатам.

Для проверки результатов мы использовали работы (Aleskerov, Kurbanov, 1999; Aleskerov et al., 2011), в которых расчет проходил с помощью генерации набора случайных профилей. Сравнение результатов показало, что расхождение по индексу НК между точным расчетом и методом генерации случайных профилей составляло в пределах 0,001.

Теперь приведем график для индексов свободы манипулирования (I_1) (рис. 2).

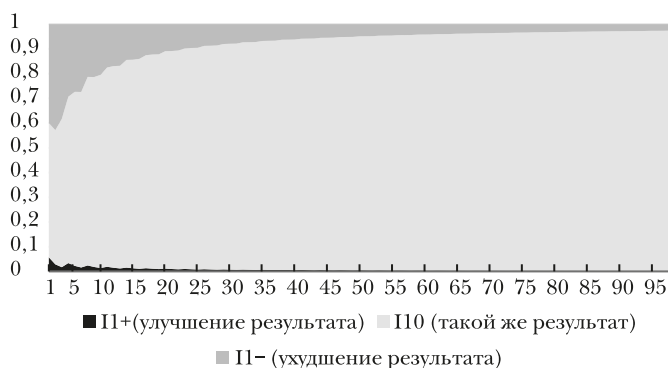


Рис. 2

Индексы свободы манипулирования

Примечание. Темно-серым цветом (см. внизу графика — доля попыток, ведущих к улучшению результата); серым цветом (см. вверху графика — доля попыток, ведущая к ухудшению результата коллективного выбора для манипулирующего участника); светло-серым (центр) — доля попыток манипулирования, ведущих к неизменности результата.

Чаще всего запись в бюллетень неискренних предпочтений приводит к тому, что коллективный выбор не меняется. Это интуитивно понятный вывод, так как особенно на большом числе участников голос одного человека имеет все меньшие значения. Число случаев, когда изменение предпочтений ведет к ухудшению результата, превышает число случаев, когда изменение предпочтений приводит к улучшению результата. Это означает, что манипулирующему участнику нужно быть осторожным, чтобы случайно не получить ухудшенного для себя результата.

Главный результат данной работы – алгоритмы, позволяющие получить точные оценки индексов манипулируемости для случая трех альтернатив. Мы рассмотрели, как возможно посчитать точные значения как для IAC, так и для IC, сделав это за разумное время вплоть до случая 100 участников. Были приведены примеры результатов для Правила относительного большинства, была произведена сверка с известными в литературе результатами, полученными на основе подхода случайной генерации профилей. При этом расчеты были сделаны и для ряда других правил.

Дальнейшее направление исследования – анализ индексов манипулируемости полученных данных для различных правил. В частности, исследование вопроса, можно ли выделить правила голосования, которые Парето-доминируют другие правила в терминах манипулируемости, т.е. являются всегда менее манипулируемыми, чем другие.

ЛИТЕРАТУРА/REFERENCES

- Иванов А.А.** (2020). Эффективные вычислительные схемы расчета манипулируемости процедур агрегирования // *Информационные технологии и вычислительные системы*. № 2. С. 38–50. [**Ivanov A.A.** (2020). On efficient schemes of estimating the degree of manipulability of aggregation procedures. *Information Technologies & Computational Systems*, 2, 38–50 (in Russian).]
- Aleskerov F., Karabekyan D., Sanver R., Yakuba V.** (2011). On manipulability of positional voting rules. *SERIE: Journal of the Spanish Economic Association*, 2 (4), 431–446.
- Aleskerov F., Kurbanov E.** (1999). Degree of manipulability of social choice procedures. A. Alkan et al. (eds.). *Current trends in economics. Studies in economic theory*. Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 8, 13–27.
- Barbera S., Bossert W., Pattanaik P.** (2004). Ranking sets of objects. In: *Handbook of Utility Theory*. S. Barbera, P.J. Hammond, C. Seidl (eds.). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Chamberlin J.R.** (1985). An investigation into the relative manipulability of four voting systems. *Behavioral Science*, 30 (4), 195–203.
- Duggan J., Schwartz T.** (2000). Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard–Satterthwaite generalized. *Social Choice and Welfare*, 17, 85–93.
- Gibbard A.** (1973). Manipulation of voting schemes. *Econometrica*, 41, 587–601.
- Kelly J.** (1993). Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't. *Social Choice and Welfare*, 10, 161–175.
- Nitzan S.** (1985). The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation. *Public Choice*, 47, 349–370.
- Satterthwaite M.** (1975). Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10, 187–217.

Xia L., Conitzer, V, Procaccia A. (2010). A scheduling approach to coalitional manipulation. *Proceedings of the ACM Conference on Electronic Commerce*, 275–284. DOI: 10.1145/1807342.1807386

Поступила в редакцию 05.10.2022

Received 05.10.2022

A.A. Ivanov

National Research University «Higher School of Economics», Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences (ICS RAS), Moscow, Russia

On the algorithms of exact estimations of manipulability of social choice rules for the case of 3 alternatives

Abstract. Manipulation is a phenomenon when an agent or a group of agents misrepresent her/their preferences in the ballots in order to obtain a better outcome of the social choice. It has been proven that there is no not-dictatorial social choice rule which is non-manipulable. There are two approaches to find the least manipulable social choice rules. The first one implies finding a theoretical formula for each rule. However, there are many known social choice rules and a list of manipulability indices which make this task very hard. The second approach is to generate a set of random profiles to obtain an approximate values of manipulability indices. We developed an algorithm which allows to get not approximate, but exact values of manipulability indices for any given social choice for the case of 3 alternatives. We provide the description of the algorithm, its optimizations, memory and time needed compared to the previously known algorithms, as well as the examples of the results.

Keywords: *manipulability, strategic manipulation, social choice rules, voting.*

JEL Classification: D71, D72.

For reference: Ivanov A.A. (2022). On the algorithms of exact estimations of manipulability of social choice rules for the case of 3 alternatives. *Journal of the New Economic Association*, 5 (57), 14–23. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-57-5-1