Журнал НЭА,
№ 4 (56), 2022,
с. 12–27

М.Б. Искаков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

Теоремы существования равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях

Аннотация. В статье предлагаются методы построения теорем существования равновесий в безопасных стратегиях (РБС) из известных теорем существования равновесий Нэша (РН). Рассуждение строится на основании трактовки системы определений РБС как развития логики рационального подхода в определении РН. Главный полученный в статье результат: при выполнении условия сильных угроз для существования РБС достаточно потребовать соблюдения требований исходной теоремы для РН только на безопасных множествах профилей. Теорема сформулирована в общем, а также в локальном варианте, который является достаточно мощным инструментом для практического применения в прикладных задачах. На основании этого результата появляется перспектива конструирования многочисленных частных теорем существования РБС. В качестве демонстрации применения этот подход протестирован на примере теоремы Дебре о существовании социального равновесия, из которого получена соответствующая теорема существования РБС.

Ключевые слова: *равновесие в безопасных стратегиях, равновесие Нэша, конкурентные отклонения, неконкурентные отклонения, теоремы существования равновесия по Нэшу, теория рациональности.*

Классификация JEL: C72.

Для цитирования: **Искаков М.Б.** (2022). Теоремы существования равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 4 (56). С. 12–27. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-56-4-1

Введение

Важнейшим результатом статьи является сформулированное в теореме 2 условие существования равновесий в безопасных стратегиях (РБС) — как выполнение требований исходной теоремы существования равновесий Нэша (РН) на множестве безопасных стратегий при условии сильных угроз. Оно получено как применение принципа сильных штрафов (Бурков, 1977) к задачам поиска устойчивых множеств безопасных стратегий и профилей в игровых задачах. Можно утверждать, что полученный метод конструирования теорем существования РБС основывается на принципе сильных угроз[1].

В разд. 1 обсуждается литература в областях существования равновесий Нэша в разрывных играх и равновесий в возражениях и контрвозражениях — как наиболее близкого по идеологии (угрозы и контругрозы) метода решения таких задач. В разд. 2 кратко проанализированы системы определений РБС через призму классических представлений о РН как основной концепции решения игровых задач.

В разд. 3–6 раскрывается основная тема статьи — существование равновесных решений. В разд. 3 вводятся необходимые понятия. В разд. 4 предлагаются и обсуждаются разные альтернативные подходы к решению задачи. В разд. 5 полу-

[1] Статья написана в соответствии с перспективными планами, возникшими в ходе работы над большой статьей (Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont, 2018). Автор выражает глубокую признательность соавторам этой работы, К. Д'Апремону и А.Б. Искакову. Основные положения статьи были доложены на семинарах: «Теория управления организационными системами» и «Экспертные оценки и анализ данных» в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова. Автор благодарен их руководителям Д.А. Новикову и Ф.Т. Алескерову за содержательное обсуждение.

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

чен основной результат статьи. В разд. 6 получен локальный вариант основной теоремы, достаточно сильный, чтобы на его основе искать решение прикладных задач. В разд. 7 показан пример применения базового метода для получения частной теоремы существования РБС на основе теоремы Дебре. В заключительном разделе обсуждаются и сравниваются разные подходы к решению и приводятся преимущества предложенного нами подхода.

1. Обзор литературы

1.1. Существование равновесий Нэша в разрывных играх

Обзор написан на основе статьи (Искаков М., Искаков А., 2017). Исследование равновесий в разрывных играх обычно связывают с поиском критериев существования равновесий Нэша и близких к нему типов равновесий. Например, в работе (Debreu, 1952) существование социального равновесия Дебре, т.е. равновесия на множестве социально допустимых профилей, выводится из свойства обобщенной непрерывности функций наилучшего ответа игроков на этом множестве.

Проблема существования РН в игровых задачах была поднята в статье (Dasgupta, Maskin, 1986a, 1986b), где авторы рассмотрели ряд важных прикладных разрывных игр, не имеющих решения по Нэшу. Они доказали существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях для семейства игр с разрывными функциями выигрышей, которое покрывает очень широкий класс задач и моделей, но само решение при этом становится существенно более сложным вычислительно, а рациональность становится труднее интерпретировать в контексте прикладной экономики.

Статью (Reny, 1999) следует рассматривать как ключевую публикацию, развивающую идеи (Dasgupta, Maskin, 1986a, 1986b) в направлении поиска равновесий Нэша в разрывных играх. В этой работе был предложен достаточно простой критерий, включающий большинство ранее известных критериев существования. Ключевая концепция Рени — способность игрока *гарантировать выигрыш*, т.е. отклониться в такую стратегию, которая гарантирует его выигрыш при любых достаточно малых отклонениях других игроков от заданного профиля. Теорема Рени утверждает, если из любого профиля игры хотя бы один из игроков может отклониться, увеличив выигрыш, в устойчивую точку, где этот выигрыш непрерывен по стратегиям оппонентов, то в игре существует РН.

В ответ на эту публикацию появился ряд работ, в которых условия Рени были ослаблены или упрощены в нескольких направлениях: (Bagh, Jofre, 2006; Bich, 2009; McLennan, Monteiro Tourky, 2011; Prokopovych, 2011; Carmona, 2009; Tian, 2009; Barelli, Meneghel, 2013) и др. Многие из этих критериев также применимы к неквазивогнутым играм, например (Bich, 2009; Barelli, Meneghel, 2013) и др. В частности, в (Bich, 2009) автор, применив квазивогнутые оболочки функций, сумел ослабить самое сильное ограничение теоремы Рени, требующее квазивогнутости выигрышей игроков. Однако условие Рени устойчивости выигрыша игрока к малым возмущениям стратегий других игроков в том или ином виде является неотъемлемой частью всех этих подходов.

В данной статье предлагается другой подход к поиску равновесий. Вместо того чтобы накладывать условие на игру, ослабляются условия равновесия. Это

Журнал НЭА,
№ 4 (56), 2022,
с. 12–27

также позволяет исследовать те игры, в которых равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует в принципе. Соответственно, концепция *безопасности* интерпретируется несколько иначе, чем у Рени. В предлагаемой концепции *безопасные отклонения* считаются *безопасными* по отношению к последующим односторонним (ответным) отклонениям других игроков, а не по отношению к их произвольным малым отклонениям. Это означает, что Рени рассматривает устойчивость к малым контротклонениям всей совокупности оппонентов, а в РБС – к произвольным улучшающим односторонним контротклонениям отдельных игроков. Как указано выше, предложенную интерпретацию *безопасности* отклонений можно рассматривать как естественную часть определения равновесия Нэша, если анализировать его с точки зрения односторонних отклонений.

Именно на основе перечисленных моделей можно строить соответствующие теоремы существования РБС. За десятилетия наработан большой пласт исследований о существовании РН или близких к нему концепций равновесий. Перечисленные выше работы не претендуют на сколько-нибудь широкий охват этой поистине безграничной темы, а просто отмечают те направления, на которых опробовались предлагаемые подходы к конструированию теорем существования РБС.

1.2. Решения в возражениях и контрвозражениях

Наиболее близкий к понятию РБС (в смысле общей идеологии) подход в теории игр – концепция решения *в угрозах и контругрозах* (или *в возражениях и контрвозражениях*), применяющаяся для анализа коалиционных игр. Понятие угроз и контругроз по отношению к образованию коалиции впервые появляется в условиях внутренней и внешней устойчивости решения игры в классической работе (Neumann, Morgenstern, 1944). Условие внутренней устойчивости означает условие отсутствия угроз внутри образовавшейся коалиции, а внешняя устойчивость предполагает, что у коалиции найдется контругроза на любую угрозу игроков, не входящих в коалицию. Термин *угрозы и контругрозы* (или, в более точном переводе, *возражения и контрвозражения*) был введен в работе (Aumann, Maschler, 1964) для анализа устойчивости коалиционных конфигураций. Указанные модели не являются строго рациональными в традиционном смысле, поскольку апеллируют к соображениям о динамическом поведении, но не моделируют этого поведения в явном виде. Тем не менее они описывают явления, наблюдаемые на практике. Обзор литературы этого направления кооперативных игр о множестве сделок можно посмотреть в (Holzman, 2001).

Идея угроз и контругроз, последовательно примененная к играм в нормальной форме, была реализована в концепции *стратегии угроз и контругроз*, описанной в (Вайсборд, Жуковский, 1980), и *V-решения* (Вилкас, 1990). Основные отличия этого подхода от РБС состоят в следующем. В РБС рассматриваются не коалиции, а отдельные игроки. Это ограничение сильно упрощает анализ. Построить конструкцию, аналогичную РБС, для коалиционного взаимодействия пока представляется затруднительным. В РБС угрозы и контругрозы рассматриваются только относительно фиксированной игровой ситуации, стратегий оппонентов, осуществляющих угрозу и контругрозу, в то время как в альтернативных подходах применяется намного более сильное требование превосходства выигрыша угрожающего игрока при любых стратегиях оппонентов. Но главное принципиальное отличие

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

предлагаемого подхода — уже указанное выше исключение из числа равновесных решений профилей с угрозами, сдерживаемыми контругрозами. Логичная теоретическая конструкция стратегий в угрозах и контругрозах оказалась сложной и трудноприменимой, а множество решений — очень большим.

В недавних работах последовательное применение аумановского принципа возражений и контрвозражений, построенного для бескоалиционных игр, объясняющего эффекты одновременно молчаливого сговора и жесткого взаимодействия, к играм в нормальной форме было сформулировано как равновесие в угрозах и контругрозах, или равновесие Нэша-2 во второй работе (Iskakov M., Iskakov A., 2012; Sandomirskaia, 2015).

Принципиальное отличие РБС от равновесий в угрозах и контругрозах состоит в том, что в предложенной концепции акцент сделан не на стратегиях наказания, а на осторожности, не на конструировании стратегий контругроз, блокирующих угрозы, а на избегании самих угроз. Достоинством такого подхода с исследованном ряде прикладных задач (модели Хотеллинга (Hotelling, 1929; d'Aspremont, Gabszewicz, Thisse, 1979), модели Таллока (Tullock, 1967; Skaperdas, 1994), модели Бертрана–Эджворта (Bertrand, 1883; Edgeworth, 1925), модели Ротшильда–Стиглица–Вильсона (Rothschild, Stiglitz, 1976; Wilson, 1977)) оказалась ограниченность множества решений, часто имелось только единственное решение с учетом перестановки игроков.

2. Система определений РБС

Основой этого и следующего раздела является анализ системы определений РБС в статье (Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont, 2018). Сформулируем саму систему определений, прослеживая общую логику с концепцией РН и конкурентных отклонений, которая уже далее станет основой для поиска существования решений. Итак, рассматривается некооперативная игра n участников $G=\left(i\in N, s_i\in S_i, u_i\in\mathbb{R}\right)$ в нормальной форме. Предлагаемая концепция равновесия основана на понятиях *угрозы* и *безопасного отклонения*.

Определение 1. *Угрозой* игрока i против игрока j в профиле стратегий s называется такое отклонение s_i', что $u_i\left(s_i',s_{-i}\right)>u_i(s)$ и $u_j\left(s_i',s_{-i}\right)<u_j(s)$. Отклонение игрока i в профиле стратегий s называется *конкурентным отклонением*, если оно является угрозой против какого-либо игрока в s.

Угроза (и конкурентное отклонение) указывает на ситуацию, в которой одному игроку выгодно ухудшить положение другого. В этом отношении важным свойством стратегии является избежание таких угроз.

Определение 2. Стратегия s_i игрока i называется *безопасной стратегией* в профиле стратегий s, если ни один игрок $j\neq i$ не имеет угроз против игрока i в s. Иначе она называется *небезопасной стратегией*. Профиль стратегий s называется *безопасным профилем*, если стратегии всех игроков в нем безопасны.

Можно также сказать, что профиль стратегий является безопасным, если ни один игрок не может сделать конкурентного отклонения. Введем теперь дополняющее понятие к конкурентному отклонению.

Определение 3. *Неконкурентным отклонением* игрока i в профиле стратегий s называется такое отклонение s_i', что $u_i\left(s_i',s_{-i}\right)>u_i(s)$ и $u_j\left(s_i',s_{-i}\right)\geq u_j(s)$ для всех других игроков $j\neq i$.

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

Таким образом, все выгодные односторонние отклонения игроков разделяются на конкурентные и неконкурентные – в зависимости от влияния на других игроков. Неконкурентные отклонения не представляют непосредственной угрозы для других игроков. Теперь с точки зрения взаимной безопасности игроков при односторонних отклонениях равновесие Нэша можно охарактеризовать следующим образом.

Утверждение 1. *Безопасный профиль стратегий называется равновесием Нэша, если ни один игрок не может сделать неконкурентного отклонения.*

Если следовать «обоснованию возражений и контрвозражений» (Aumann, Maschler 1964) и подчеркнуть стремление игроков к безопасности, то можно расширить применение некооперативного равновесия, увеличив класс игр, в которых равновесие существует. Идея состоит в том, что неконкурентное отклонение некоторого игрока может дать возможность другому игроку угрожать отклонившемуся игроку в новом профиле стратегий. Тогда после этого неконкурентного отклонения возникает две возможности. Либо *реализация угрозы может сделать положение игрока хуже, чем до отклонения.* В этом случае будем считать отклонение *небезопасным* для отклонившегося игрока. Это должно побудить последнего – как осторожного рационального субъекта – воздержаться от отклонения. Либо *реализация угрозы не может сделать положение игрока хуже, чем до отклонения.* В этом случае отклонение может рассматриваться как *безопасное.* Формально получаем следующее определение.

Определение 4. *Безопасным неконкурентным отклонением* игрока i в профиле стратегий s называется такое неконкурентное отклонение s_i', что $u_i\left(s_i',s_{-i}\right) > u_i\left(s\right)$ и для любой угрозы $\left(s_i',s_{-i}\right) \xrightarrow{j} \left(s_i',s_j',s_{-ij}\right)$ игрока $j \neq i$ против игрока i: $u_i\left(s_i',s_j',s_{-ij}\right) \geq u_i\left(s\right)$.

Чтобы сформулировать концепцию равновесия в игре осторожных игроков, можно предположить, что такие игроки избегают *небезопасных* неконкурентных отклонений. Тогда в соответствующем определении равновесия достаточно исключить только *безопасные* неконкурентные отклонения в некооперативном равновесном профиле. Вместе с условием, что равновесие является безопасным профилем, это приводит к предлагаемому определению равновесия в безопасных стратегиях.

Определение 5. Безопасный профиль стратегий называется *равновесием в безопасных стратегиях* (РБС), если ни один игрок не может сделать безопасного неконкурентного отклонения.

Эта новая формулировка концепции РБС была опубликована в (Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont, 2018), а первая формулировка – в (Исканов, 2005).

3. Введение вспомогательных понятий: безопасный выигрыш, игра угроз, слабое РБС и их свойства

Для дальнейшего обоснования рациональности концепции РБС требуется не только установить общую логику с классическими общепринятыми подходами на уровне определений, но и развить эту логику в методах поиска соответствующих решений игровых задач уже на уровне утверждений о существовании решения. Опираясь на разобранные аналогии, необходимо установить связь концепций между ситуациями существования равновесия Нэша и существования РБС.

Журнал НЭА,
№ 4 (56), 2022,
с. 12–27

Этот путь намечен в статье (Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont, 2018). Первое важное свойство РБС вытекает из его определения.

Утверждение 2. *Любое равновесие Нэша является равновесием в безопасных стратегиях.*

Как из имеющихся теорем существования равновесия Нэша получить теоремы существования РБС? Первый подход к проблеме существования решения: найти такую игру, в которой равновесие Нэша соответствовало бы РБС в исходной игре. В этом случае можно будет применять весь инструментарий результатов существования, имеющийся для этого равновесия.

Для этого введем дополнительные требующиеся понятия.

Обозначим множество безопасных стратегий при заданных стратегиях других игроков как $Q_i\left(s_{-i}\right)$. Используя такие множества, можно только ответить на вопрос, есть ли в профиле s угрозы или он безопасен. Но насколько существенны эти угрозы, безопасные множества ответа дать не смогут. При рассмотрении проблемы существования РБС для произвольной игры $G=\left(S_i,u_i\right)_{i=1}^N$ необходимо построить такой инструмент, который отражал бы не только наличие угроз в профилях, но и их силу. Чтобы охарактеризовать угрозы количественно, можно поставить в соответствие исходной игре такую, в которой функции выигрышей учитывают ожидание наихудшей имеющейся в профиле угрозы.

Определение 6. *Безопасный выигрыш* игрока i в профиле стратегий s равен его выигрышу при реализации наихудшей угрозы в небезопасном профиле и совпадает с его выигрышем в безопасном профиле, т.е.

$$v_i\left(s\right)=\begin{cases}\inf\limits_{i\neq j,\ s_i':\ u_j\left(s_j',s_{-j}\right)>u_j(s)} u_i\left(s_j',s_{-j}\right), & s_i\notin Q_i\left(s_{-i}\right),\\ u_i\left(s\right), & s_i\in Q_i\left(s_{-i}\right).\end{cases}$$

Игрой угроз, соответствующей игре G, называется игра $\tilde{G}=\left(S_i,v_i\right)_{i=1}^N$.

Введенная функция $v_i\left(s\right)$ позволяет охарактеризовать безопасность профиля и безопасность отклонений простым способом.

Утверждение 3.

1. Профиль s безопасен для игрока i тогда и только тогда, когда $u_i\left(s\right)=v_i\left(s\right)$.

2. Профиль s небезопасен для игрока i тогда и только тогда, когда $u_i\left(s\right)>v_i\left(s\right)$.

3. Выгодное отклонение $s\xrightarrow{i}s'$ безопасно для игрока i тогда и только тогда, когда $v_i\left(s'\right)\geq u_i\left(s\right)$.

4. Выгодное отклонение $s\xrightarrow{i}s'$ небезопасно для игрока i тогда и только тогда, когда $v_i\left(s'\right)<u_i\left(s\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверяется непосредственно из определений. ■

Теперь, после описания связи игры угроз с безопасностью профилей, естественно установить отношение между равновесностью в ней и в исходной игре.

Утверждение 4. *Если безопасный профиль s^* является строгим равновесием Нэша в игре угроз $\tilde{G}$, то он будет РБС в исходной игре. Если s^* является РБС в исходной игре G, то s^* будет равновесием Нэша в игре угроз $\tilde{G}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть s^* является РБС в игре G. Для всех безопасных профилей, в том числе и для РБС, s^* функции выигрыша и безопасного выигрыша равны $u_i(s^*)=v_i(s^*)$. Предположим, что существует такое отклонение s_i' игрока i, что $v_i(s_i',s_{-i}^*)>v_i(s^*)$. Это означает, что отклонение s_i' выгодно и безопасно

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

для игрока i, по утверждению 3. Значит, s^* не является РБС — а это противоречит предположению. Поэтому наше предположение было ложным, и, следовательно, $v_i(s_i', s_{-i}^*) \le v_i(s^*)$ для всех i и отклонений s_i', т.е. s^* — равновесие Нэша в игре угроз $\hat{G}$.

Пусть s^* — строгое равновесие Нэша в игре угроз, тогда, по утверждению 3, неравенство $v_i(s') < u_i(s^*)$ эквивалентно тому, что выгодное отклонение s' небезопасно для i. Безопасный профиль, не имеющий безопасных отклонений, является РБС. ■

Таким образом, введенный инструментарий — безопасные множества, безопасный выигрыш, игра угроз — позволяет подойти к проблеме существования РБС. Это дает возможность анализировать решения в безопасных стратегиях для некоторых важных прикладных задач, например задачи Хотеллинга о пространственно распределенных рынках.

1.3. Слабое равновесие в безопасных стратегиях

Для того чтобы точно установить соотношение между РН в игре угроз и РБС, потребуется ввести еще одно понятие. По определению 4 в качестве безопасных отклонений рассматриваются такие отклонения, в которых ответные угрозы уменьшают выигрыш ровно настолько, насколько он увеличивается при отклонении. Однако такие отклонения являются промежуточными, поскольку лежат на границе между безопасными и небезопасными отклонениями. В зависимости от специфики задачи они могут как угрожать равновесию, так и не угрожать ему. Поэтому их можно выделить в особый класс безопасных отклонений.

Определение 7. Безопасное отклонение s_i' игрока i в профиле s называется *тривиальным*, если существует такая угроза $\{(s_i', s_{-i}), (s_i', s_j', s_{-ij})\}$ игрока $j \ne i$ игроку i, что $u_i(s_i', s_j', s_{-ij}) = u_i(s)$.

Профили, в которых игроки могут делать только тривиальные безопасные отклонения, можно тоже считать слабоустойчивыми. Если рассматривать эти промежуточные профили как слабые равновесия, мы приходим к понятию слабого РБС.

Определение 8. Безопасный профиль стратегий называется *слабым равновесием в безопасных стратегиях,* если ни один игрок не может сделать нетривиального безопасного отклонения.

4. РБС и равновесия Нэша для игры угроз

Утверждение 4 ставит в соответствие РБС и равновесие Нэша. Теперь требуется уточнить это соответствие, желательно не только в смысле необходимости, но и в более сильном варианте утверждения — относительно достаточности. Такое уточненное соответствие устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Профиль s^* является равновесием в безопасных стратегиях тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) s^* – безопасный профиль;

2) s^* – равновесие Нэша в игре угроз $\tilde{G}$;

3) $\forall i, \forall s_i' : v_i\left(s_i', s_{-i}^*\right) = v_i\left(s^*\right) \Rightarrow u_i\left(s_i', s_{-i}^*\right) = u_i\left(s^*\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть s^* — слабое равновесие в безопасных стратегиях. По определению РБС s^* — безопасный профиль. Согласно утверждению 4 s^* — равновесие Нэша в игре угроз $\tilde{G}$. Допустим, что существует игрок i и его

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

отклонение s_i' такое, что $v_i(s_i', s_{-i}^*) = v_i(s^*)$. Согласно утверждению 3 $u_i(s^*) = v_i(s^*)$ для любого безопасного профиля s^*. Очевидно, что $v_i(s_i', s_{-i}^*) \le u_i(s_i', s_{-i}^*)$ и поэтому $u_i(s^*) \le u_i(s_i', s_{-i}^*)$. Допустим, что $u_i(s^*) < u_i(s_i', s_{-i}^*)$. Тогда s_i' — безопасное отклонение игрока i из профиля s^*, и профиль s^* не является РБС. Противоречие показывает, что сделанное допущение было ошибочным, и $u_i(s^*) = u_i(s_i', s_{-i}^*)$. Третье условие тоже доказано.

Докажем утверждение в обратную сторону. Согласно утверждению 3 $u_i(s^*) = v_i(s^*)$ для любого игрока i и для любого безопасного профиля s^*. Предположим, существуют игрок i и такие его отклонения s_i', что $u_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i(s^*)$. Тогда из второго и третьего условий следует, что $v_i(s_i', s_{-i}^*) < v_i(s^*)$ и существует такое отклонение $s_j' \in Q_j(s_i', s_{-i}^*)$ $(j \ne i)$, что $u_i(s_j', s_i', s_{-ij}^*) < v_i(s^*) = u_i(s^*)$. Пара профилей $(s_i', s_{-i}^*) \to (s_j', s_i', s_{-ij}^*)$ являются угрозой согласно определению 1. Таким образом, s_i' не будет безопасным отклонением согласно определению 4, т.е. не существует игрока, который может сделать безопасное отклонение из профиля s^*. Профиль s^* будет РБС. ■

Следующее утверждение является следствием данного факта.

Следствие. Профиль в игре G является слабым равновесием в безопасных стратегиях тогда и только тогда, когда он безопасен в игре G и является равновесием Нэша в игре угроз $\tilde{G}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного профиля s^* возможны только четыре взаимоисключающих случая:

а) s^* содержит угрозы;

б) s^* безопасен и не содержит безопасных отклонений;

в) s^* безопасен и содержит только тривиальные безопасные отклонения;

г) s^* безопасен и содержит нетривиальные безопасные отклонения.

Проверкой условий определений и теоремы 1 устанавливается эквивалентность следующих трех формулировок: s^* — слабое равновесие в безопасных стратегиях в G; s^* безопасен в G и является равновесием Нэша в $\tilde{G}$; случай в). ■

Следует указать на слабые места теоремы 1, ограничивающие ее применимость.

Первая проблема состоит в том, что за пределами множества безопасных профилей также имеются равновесия Нэша игры угроз. А о том, как отличить такие профили от РБС, сформулированная теорема не дает ответа, оставляя это за рамками рассмотрения. Есть и другая проблема: для многих задач нахождение функции безопасного выигрыша может оказаться более сложной задачей, чем прямой поиск РБС.

С учетом отмеченных ограничений полученное утверждение можно рассматривать только как промежуточный инструмент для построения более мощных и эффективных критериев существования РБС.

5. РБС и множества безопасных стратегий при условии сильных угроз

Второй подход, впервые намеченный в (Искаков, 2019), к проблеме существования решения: наложить на игру такое условие, при котором можно было бы рассматривать игру только на множестве безопасных стратегий. В качестве **самой общей идеи** построения критерия существования РБС можно взять

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

(в качестве аналогии) принцип сильных штрафов в теории активных систем (Бурков, 1977; Бурков, Кондратьев, 1981; Бурков, Новиков, 1999). Этот принцип заключается в том, что «штрафы за отклонение от реализации плана настолько велики, что единственной разумной линией поведения предприятия является безусловное выполнение принятых обязательств» (Бурков, 1977, с. 43). Иными словами, если имеется множество желательных или приемлемых планов, то выход агентов за его пределы штрафуется настолько сильно, чтобы исключить всякую мотивацию отклониться.

По аналогии будем считать: пусть имеется множество безопасных стратегий, а любой опасный профиль содержит настолько серьезные угрозы, что осторожный рациональный игрок всегда будет искать решения только в безопасном множестве. Насколько сильными (по минимуму) должны быть угрозы, чтобы обеспечить такой эффект? Ответ на этот вопрос можно сформулировать в виде следующего определения.

Определение 9. Угроза игроку i в профиле s является *сильной*, если существует такая безопасная стратегия $s' = (s_i', s_{-i})$, что $u(s') = v(s') > v(s)$. Для игрока i в игре G выполняется *условие сильных угроз*, если содержащиеся в любом опасном профиле угрозы являются для него сильными. Игра G называется игрой *с сильными угрозами*, если для всех игроков в ней выполняется условие сильных угроз.

То есть для любого профиля, не безопасного для игрока, существует отклонение этого игрока в такой безопасный профиль, в котором его выигрыш больше наихудшей угрозы в исходном профиле.

Вторая идея теоремы существования РБС состоит в том, что если для игры выполняется требование сильных угроз и имеется некоторая известная теорема существования равновесия Нэша, можно потребовать выполнения условий этой теоремы только на безопасном множестве (или даже на некотором предпочтительном подмножестве этого множества, содержащего наилучшую безопасную альтернативу – достигаемое максимальное значение безопасного выигрыша), и этого будет достаточно для существования РБС.

Более формально можно описать этот подход следующим образом. Пусть имеется некоторое верное утверждение (исходная теорема): «Если для игры выполняется условие (#), то в игре существует равновесие Нэша». Пусть условие (#) выполняется на множествах безопасных стратегий игроков. Такое предположение надо сформулировать строго. Под выполнением условия на множествах безопасных стратегий будем понимать следующее.

Введем вспомогательную игру $\bar{G}_{Q^{(i)}}$, выигрыши игроков в которой равны выигрышам исходной игры G в профилях, где их стратегии безопасны, и некоторой константе $C_{min} < u_i(s)\,\forall i,s$, ограничивающей функции выигрыша компактной игры снизу, – там, где стратегии этих игроков небезопасны. То есть если $Q^{(i)} \subseteq S$ – множество безопасных профилей игрока i в исходной игре G, то игру

$$\bar{G}_{Q^{(i)}}\left(S_i, \bar{u}_i\right), \bar{u}_i\left(s\right) = \begin{cases} u_i\left(s\right), s \in Q^{(i)}; \\ C_{min}, s \notin Q^{(i)} \end{cases}$$

будем называть соответствующей ей обрезанной игрой. Константа C_{min} здесь имеет исключительно штрафную функцию, позволяя выбросить из рассмотрения все те небезопасные области игры, которые исключены условием сильных угроз.

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

Определение 10. Пусть дана игра $G\left(S_i,u_i\right)_{i=1}^N$ с множествами безопасности $Q^{(i)} \subseteq S$. Игра

$$\bar{G}_{Q^{(i)}}\left(S_i,\bar{u}_i\right), \bar{u}_i(s)=\begin{cases} u_i(s), s\in Q^{(i)};\\ C_{min}, s\notin Q^{(i)}\end{cases}$$

называется *соответствующей ей обрезанной игрой*. Условие (#) существования равновесия Нэша выполняется для игры G на безопасных множествах $Q^{(i)} \subseteq S$, если оно выполняется для соответствующей обрезанной игры.

Таким образом, если для игры справедливы два условия: *условие теоремы существования равновесия Нэша на безопасном множестве* и *условие сильных угроз*, то можно ожидать, что в данной игре имеется РБС. Условие исходной теоремы (#) обеспечивает наличие равновесия в нужном множестве, а условие сильных угроз гарантирует его устойчивость в смысле РБС для всей игры. Теперь можно сформулировать и доказать теорему.

Теорема 2. *Пусть верно утверждение: если для игры выполняется условие (#), то в игре существует равновесие Нэша. Если для игры $G\left(S_i,u_i\right)_{i=1}^N$ выполняется условие сильных угроз, а на ее безопасных множествах $Q^{(i)} \subseteq S$ выполняется условие (#) существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях.*

Доказательство. Согласно предположению теоремы для обрезанной игры $\bar{G}_{Q^{(i)}}\left(S_i,\bar{u}_i\right)$ имеет место условие (#). Следовательно, в этой игре будет равновесие Нэша s^*. В этом профиле стратегия каждого игрока $s_i^* \in Q^{(i)}$ является безопасной стратегией, так как в противном случае выигрыш некоторого игрока в обрезанной игре $\bar{u}_i(s)$ принимал бы минимальное значение C_{min}, и для этого игрока имелась бы лучшая альтернатива в безопасном множестве $Q^{(i)}$.

Рассмотрим любое отклонение от равновесного профиля $s^* \xrightarrow{i} \left(s_i', s_{-i}^*\right)$. Либо s_i' является безопасной стратегией, и тогда $u_i\left(s^*\right) \geq u_i\left(s'\right) = v_i\left(s'\right)$. Либо s_i' — небезопасная стратегия и тогда угроза, содержащаяся в s', сильная. Это означает, что $u_i\left(s^*\right) = v_i\left(s^*\right) > v_i\left(s'\right)$.

Проверяем условия теоремы.

1. s^* — безопасный профиль.

2. Для любых отклонений $s_i' : v_i\left(s'\right) \leq v_i\left(s^*\right)$.

3. Выполняется, поскольку все угрозы сильны. Покажем это. Пусть имеется отклонение $s_i' : v_i\left(s_i', s_{-i}^*\right) = v_i\left(s^*\right)$. Допущение, что s' — опасный для игрока i профиль, противоречит условию сильных угроз. Значит, s' — безопасен для игрока i и $u_i\left(s_i', s_{-i}^*\right) = u_i\left(s^*\right)$. Третье условие тоже доказано.

По теореме 1, в игре G существует РБС. ■

Таким образом, если справедлива исходная теорема (для любой игры) и условие сильных угроз (для данной игры), тогда для существования РБС достаточно потребовать выполнения условий теоремы только на безопасном множестве.

6. Локальный вариант теоремы

Теорема 2 имеет общий характер, и она слабоприменима к прикладным задачам, так как требуемые в ней условия слишком сильные. Например, в ней не предусмотрена возможность того, что для некоторых профилей стратегий оппонентов определенный игрок может вообще не иметь безопасных стратегий. Рассмотрение прикладных задач (например, задачи Хотеллинга) показывает,

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

что такой случай весьма распространен. Но сформулированная в таком виде теорема 2 наиболее ясно демонстрирует общий принцип, согласно которому можно строить более конкретные и сильные теоремы существования. Тем не менее, для непосредственного исследования задач и примеров она неприменима. Для этого надо, развивая эту общую идею, формулировать более мощные критерии.

Ослабление условия *сильных угроз* заключается в том, что его выполнение требуется только по отношению к некоторому множеству $B=\times_{i=1}^{N} B_i$, где множества B_i предполагаются компактными выпуклыми подмножествами S_i.

Определение 11. Для игрока i выполняется условие сильных угроз в B, если для каждого $s_{-i}\in B_{-i}$ существует такое непустое подмножество $\tilde{Q}_i(s_{-i})\subseteq Q_i(s_{-i})\cap B_i$, что для каждой стратегии $s_i\notin\tilde{Q}^{(i)}$ существует такая стратегия $s_i'\in\tilde{Q}^{(i)}$, что $u_i(s_i',s_{-i})=v_i(s_i',s_{-i})>v_i(s_i,s_{-i})$. Игра G называется *игрой с сильными угрозами по отношению к B*, если для всех игроков выполняется условие сильных угроз в B.

Для любого $s_{-i}\in B_{-i}$ множество $\tilde{Q}_i(s_{-i})$ в игре с сильными угрозами предполагается всегда непустым. График многозначной функции $\tilde{Q}_i(s_{-i})$, $\Gamma(\tilde{Q}^{(i)})=\left\{(s_i,s_{-i})\,|\,s_i\in\tilde{Q}_i(s_{-i}),s_{-i}\in B_{-i}\right\}$ определяется как подмножество B.

Теперь можно сформулировать локальный вариант базовой теоремы существования РБС.

Теорема 3. *Пусть верно утверждение: если для игры выполняется условие (#), то в игре существует равновесие Нэша. Если игра $G\left(S_i,u_i\right)_{i=1}^{N}$ является игрой с сильными угрозами по отношению к B, а на ее безопасных множествах $Q^{(i)}\subset S$ выполняется условие (#) существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях.*

Доказательство. Рассмотрим для каждого игрока $k=1,\ldots,N$ игру $G_k\left((B_k,S_{-k}),u\right)$. Согласно теореме 2 в каждой из этих игр существует РБС. Так как игра $G\left(S_i,u_i\right)_{i=1}^{N}$ является игрой с сильными угрозами, то любое из этих равновесий в играх G_k является РБС и в G. ■

Имеет смысл пояснить выбор дополнительных ограничений: подмножества $\tilde{Q}_i\left(s_{-i}\right)$ и множества B. Множество $Q_i\left(s_{-i}\right)$ может включать такие профили, которые для игрока безопасны, только потому что его выигрыш в них нулевой или настолько мал, что никакие альтернативы не сделают его хуже, и поэтому угрозами быть не могут. При решении задач естественно выбрать подмножество таких стратегий, которые представляют для игрока ценность. В конкретных задачах выбор соответствующих подмножеств очевиден.

Теорема не говорит о том, как надо выбирать множество B. В некоторых случаях, например в задаче Хотеллинга, его можно выбрать по условию непустоты подмножества безопасных стратегий: $\forall s\in B,\ \forall i:\tilde{Q}_i\left(s_{-i}\right)\neq\varnothing$. В других задачах, например в конкуренции за ренту Таллока, выбор B не так очевиден,– он скорее интуитивен, так что этот вопрос требует дальнейшего исследования. Обе задачи и выбор для них множества B рассмотрены в статье (Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont, 2018).

В чем состоит содержательный смысл сформулированной теоремы? Насколько она может оказаться перспективной и полезной применительно к приложениям? Теорема показывает, что игра в целом может быть сколь угодно плохой, но если в ней удастся найти хорошую ограниченную область – $B=\times_{i=1}^{N} B_i$, мы можем гарантировать в ней наличие равновесия. Если угрозы при выходе из этой области сильны, то можно быть уверенным, что, действуя в одиночку,

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

осторожные и не доверяющие друг другу игроки из нее не выйдут. А выполнение хороших условий *только* на безопасных множествах и *только* в этой области (а не во всей игре, как в исходных теоремах) гарантирует существование равновесия, которое внутри области является равновесием Нэша, а для всей игры – РБС. Так что проблема существования решения сводится к тому, чтобы найти, или, может быть угадать, хорошую область в игре.

Таким образом, сформулировано достаточно сильное для практического применения утверждение базовой теоремы существования РБС. Теперь можно конкретизировать использованный в ней абстрактный вид исходной теоремы и получать уже прикладные варианты критериев существования.

7. Теорема существования РБС по Дебре

В качестве примера применения общей теоремы 2 к конкретному варианту исходной теоремы приведем (в более подробном изложении) теорему из статьи (Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont, 2018).

7.1. Теорема Дебре

В качестве первого варианта исходной теоремы существования равновесия Нэша была взята конструкция из статьи (Debreu, 1952). Она формулируется следующим образом.

Полигедрон – множество в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфное геометрическому полигедрону (т.е. объединению конечного числа выпуклых оболочек в $\mathbb{R}^n$). Он очевидно замкнут.

Пусть при заданном s_{-i} (т.е. действиях всех остальных) выбор агента i ограничен непустым компактным множеством $A_i\left(s_{-i}\right)\subset S_i$. Агент i выбирает s_i из $A_i\left(s_{-i}\right)$ так, чтобы максимизировать $u_i\left(s_{-i},\ s_i\right)$, которая предполагается непрерывной по s_i в $A_i\left(s_{-i}\right)$. Множества $A_i\left(s_{-i}\right)$ интерпретируется как задающие совокупность социально приемлемых выборов.

Это делает интуитивным следующее определение.

Определение Дебре. s^* является *точкой социального равновесия*, если для всех $i=1,\dots,n: s_i^*\in A_i(s_{-i}^*)$ и $u_i(s^*)=\max\limits_{s_i\in A_i(s_{-i}^*)} u_i(s_{-i}^*,\ s_i)$.

График функции $A_i(s_{-i}^*)$ определяется как подмножество $S_{-i}\times S_i$ вида $\Gamma_i=\left\{\left(s_{-i},s_i\right)\mid s_i\in A_i\left(s_{-i}\right)\right\}$. Для любого s_{-i}, множество $A_i(s_{-i})$ всегда предполагается непустым.

Теорема Дебре. *Пусть для всех* $i=1,\dots,n$ *множества* S_i – *стягиваемые полигедроны;* $A_i\left(s_{-i}\right)$ – *многозначные функции из* S_{-i} *в* S_i *с замкнутыми графиками* Γ_i*;* u_i – *непрерывные функции из* Γ_i *в дополненную ось таких действительных чисел, что* $\varphi_i\left(s_{-i}\right)=\max\limits_{s_i\in A_i\left(s_{-i}\right)} u_i\left(s_{-i},s_i\right)$ *непрерывна. Если для каждого* i *и* s_{-i} *множество* $M_{s_{-i}}=\left\{s_i\in A_i\left(s_{-i}\right)\mid u_i\left(s_{-i},s_i\right)=\varphi_i\left(s_{-i}\right)\right\}$ *стягиваемо, то существует точка социального равновесия.*

7.2. Теорема существования РБС

Воспользуемся теоремой Дебре, чтобы доказать существование РБС. Для этого ослабим стандартные условия существования равновесия Нэша (в чистых стратегиях), потребовав их выполнения в соответствующем множестве B. В этом случае равновесие Нэша во множестве B оказывается РБС в исходной игре в соответствии с теоремой 3 и теоремой Дебре.

Теорема 4. *Пусть* $G\left(S_i,u_i\right)_{i=1}^{N}$ *является игрой с сильными угрозами по отношению к B, в которой для всех i, график* $\Gamma(\tilde{Q}^{(i)})$ *замкнут;* $u_i(s)$ *– непрерывная функция из* $\Gamma(\tilde{Q}^{(i)})$ *в* $\mathbb{R}$, *а функция* $\varphi_i\left(s_{-i}\right)=\max_{s_i\in\tilde{Q}_i\left(s_{-i}\right)} u_i\left(s_{-i},s_i\right)$ *непрерывна. Если для любых i и* $s_{-i}\in B_{-i}$ *множество* $M_{s_{-i}}=\left\{s_i\in\tilde{Q}_i\left(s_{-i}\right)\mid u_i\left(s_{-i},s_i\right)=\varphi_i\left(s_{-i}\right)\right\}$ *стягиваемое, то в игре G в множестве B существует равновесие в безопасных стратегиях.*

Доказательство. В качестве основы доказательства используем теорему существования социального равновесия Дебре и теорему 3. Поскольку множества $\tilde{Q}_i\left(s_{-i}\right)$ предполагаются в игре с сильными угрозами непустыми для всех $s_{-i}\in B_{-i}$, можно рассматривать их как многозначную функцию из B_{-i} в B_i. Далее, следуя Дебре, определим профиль s^* как точку социального равновесия, если для всех $i=1,\ldots,N: s_i^*\in\tilde{Q}_i\left(s_{-i}^*\right)$ и $u_i\left(s^*\right)=\max_{s_i\in\tilde{Q}_i\left(s_{-i}^*\right)} u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right)$. Тогда все условия теоремы существования Дебре удовлетворяются, и существует точка социального равновесия $s^*\in B$.

Покажем, что эта точка является РБС в *G*. Рассмотрим выгодное отклонение s_i' произвольного игрока *i* в профиле s^*. Очевидно, оно является неконкурентным, поскольку s^* — безопасный профиль стратегий. Если $s_i'\in\tilde{Q}_i\left(s_{-i}^*\right)$, то $u_i\left(s_i',s_{-i}^*\right)\le u_i\left(s^*\right)$, и отклонение не является выгодным. Если $s_i'\notin\tilde{Q}_i\left(s_{-i}^*\right)$, то в соответствии с условием сильных угроз существует такое отклонение $s_i''\in\tilde{Q}_i\left(s_{-i}^*\right)$, что $u_i\left(s_i'',s_{-i}^*\right)>v_i\left(s_i',s_{-i}^*\right)$. Поскольку $u_i\left(s_i'',s_{-i}^*\right)\le u_i\left(s^*\right)$, то $v_i\left(s_i',s_{-i}^*\right)<u_i\left(s^*\right)$. По определению функции безопасного выигрыша это означает, что неконкурентное отклонение не является безопасным. Таким образом, в безопасном профиле s^* ни один игрок не может сделать безопасное неконкурентное отклонение, т.е. s^* — точка РБС в игре *G*. ■

Итак, если взять в качестве исходной теорему Дебре, ее условия достаточно легко приводятся к условиям, требуемым формулировкой теоремы 3, и из нее получается теорема существования РБС. Единственное потребовавшееся уточнение этих условий определялось использованием понятий социального равновесия и множеств социально приемлемых выборов, которые без изменений переносятся на понятия РБС и безопасных множеств.

Заключение

Подход РБС к игровым задачам, при котором он работает, базируется на предположении, что осторожность по отношению к другим игрокам имеет больше значения, чем стратегии наказания, обучения и т.п. Если игрок при выборе своей стратегии ориентируется на собственные возможные потери, а не на последующие потери нарушителя своих интересов, он будет принимать решения на основе логики безопасных стратегий. Принципы осторожности («не подставляться») и мести («наказания») должны исследоваться в равной степени как базовые мотивы (ограниченной) рациональности. Но каждый из этих принципов изначально должен исследоваться в чистом виде, как эта логика поведения действует самостоятельно, не смешиваясь с другими. И лишь после этого встает задача описания одновременного действия обоих принципов ограниченной рациональности.

Таким образом, можно сформулировать различие между двумя подходами, равновесием в угрозах и контругрозах (РУК) и равновесием в безопасных стратегиях. РБС предлагает игроку избегать неустойчивых ситуаций и зон игры, РУК —

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

повышать устойчивость решений в этих зонах при помощи стратегии наказаний. Основной целью нашей статьи является поиск зон устойчивости к угрозам в неустойчивых играх, где нет РН, но должны существовать РБС. Именно эту задачу решает предлагаемый метод конструирования теорем существования РБС по имеющимся наработанным теоремам существования других типов.

Основными результатами исследования являются следующие:

– получен метод построения теорем существования РБС на основе имеющихся теорем существования РН;

– сформулированные в статье теоремы (в варианте локальной теоремы 3) могут быть применены к прикладным задачам;

– класс теорем существования стал теоретическим обоснованием концепции решения в безопасных стратегиях для игровых задач.

Дальнейшей перспективой работы видится апробация разработанного нами метода для конкретных теорем, применимых к еще более конкретным задачам.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

Бурков В.Н. (1977). Основы математической теории активных систем. М.: Наука. 255 с. [**Burkov V.N.** (1977). Fundamentals of mathematical theory of active systems. Moscow: Nauka. 255 p. (in Russian).]

Бурков В.Н., Кондратьев В.В. (1981). Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука. 384 с. [**Burkov V.N., Kondratiev V.V.** (1981). *Functioning mechanisms of organizational systems.* Moscow: Nauka. 384 p. (in Russian).]

Бурков В.Н., Новиков Д.А. (1999). Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег. 128 с. [**Burkov V.N., Novikov D.A.** (1999). The theory of active systems: State and prospects. Moscow: Sinteg. 128 p. (in Russian).]

Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. (1980). Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио. 304 с. [**Vaisbord E.M., Zhukovskii V.I.** (1980). Introduction to several-person differential games and their applications. Moscow: Sovetskoe radio. 304 p. (in Russian).]

Вилкас Э.Й. (1990). Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 256 с. [**Vilkas E.I.** (1990). *Optimality in games and decisions.* Moscow: Наука, Gl. red. fiz.-mat. lit. 256 p. (in Russian).]

Искаков А.Б., Искаков М.Б. (2017). В поисках обобщенной концепции рациональности // *Журнал Новой экономической ассоциации.* № 2 (34). С. 181–189. [**Iskakov A.B., Iskakov M.B.** (2017). In search of a generalized concept of rationality. *Journal of the New Economic Association*, 2 (34), 181–189 (in Russian).]

Искаков М.Б. (2005). Равновесие в безопасных стратегиях // *Автоматика и телемеханика.* № 3. С. 139–153. [**Iskakov M.B.** (2005). Equilibrium in safe strategies. *Automation and Remote Control*, 66, 3, 465–478.]

Искаков М.Б. (2019). Теоремы существования равновесия в безопасных стратегиях. В сб.: «Теория активных систем — 50 лет». Материалы международной научно-практической конференции. 18–19 ноября. Под общ. ред. В.Н. Буркова. М.: ИПУ РАН. С. 115–121. [**Iskakov M.B.** (2019). Theorems of balance existence in the safe strategies. In: *Theory of active games – 50. Papers of the International scientific & practical conference.*

Журнал НЭА,
№ 4 (56), 2022,
с. 12–27

November 18–19. V.N. Burkov (gen. ed.). Moscow: V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, 115–121 (in Russian).]

Искаков М.Б., Искаков А.Б. (2014). Равновесие, сдерживаемое контругрозами, и сложное равновесие в безопасных стратегиях. В сб.: «*Управление большими системами*». Вып. 51. М.: ИПУ РАН. С. 130–157. [**Iskakov M.B., Iskakov A.B.** (2016). Equilibrium contained by counter-threats and complex equilibrium in secure strategies. *Automation and Remote Control*, 77, 3, 495–509.]

Aumann R.J., Maschler M. (1964). The bargaining set for cooperative games. Advances in game theory. *Ann. Math. Studies*, 52, 443–476.

Bagh A., Jofre A. (2006). Reciprocal upper semicontinuity and better reply secure games: A comment. *Econometrica,* 74 (6), 1715–1721.

Barelli P., Meneghel I. (2013). A note on the equilibrium existence problem in discontinuous games. *Econometrica*, 81 (2), 813–824.

Bertrand J. (1883). Review of Cournot's 'rechercher sur la theoric mathematique de la richesse'. *Journal des Savants*, 499–508.

Bich P. (2009). Existence of pure Nash equilibrium in discontinuous and non quasi concave games. *International Journal of Game Theory,* 38 (3), 395–410.

Carmona G. (2009). An existence result for discontinuous games. *Journal of Economic Theory*, 144 (3), 1333–1340.

d'Aspremont C., Gabszewicz J., Thisse J.-F. (1979). On Hotelling's 'stability in competition'. *Econometrica,* 47 (5), 1145–1150.

Dasgupta P., Maskin E. (1986a). The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory. *Review of Economic Studies*, 53 (1), 1–26.

Dasgupta P., Maskin E. (1986b). The existence of equilibrium in discontinuous economic games, II: Applications. *Review of Economic Studies*, 53 (1), 27–41.

Debreu G. (1952). A social equilibrium existence theorem. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* 38 (10), 886–893.

Edgeworth F.M. (1925). *Papers relating to political economy I.* London: Macmillan.

Holzman R. (2001). The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets. *International Journal of Game Theory*, 29, 543–553.

Iskakov M., Iskakov A. (2012). Equilibrium in secure strategies — intuitive formulation. *Working paper WP7/2012/06.* National Research University "Higher School of Economics". Moscow: Publishing House of the "Higher School of Economics". 50 p.

Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont C. (2018). Games for cautious players: The equilibrium in secure strategies. *Games and Economic Behavior*, 110, July, 58–70.

Hotelling H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal*, 39, 153, 41–57.

McLennan A., Monteiro P.K., Tourky R. (2011). Games with discontinuous payoffs: A strengthening of Reny's existence theorem. *Econometrica,* 79 (5), 1643–1664.

Neumann J. von, Morgenstern O. (1944). *Theory of games and economic behavior.* Princeton: University Press.

Prokopovych P. (2011). On equilibrium existence in payoff secure games. *Economic Theory*, 48 (1), 5–16.

Reny P.J. (1999). On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games. *Econometrica,* 67 (5), 1029–1056.

Журнал НЭА, № 4 (56), 2022, с. 12–27

Rothschild M., Stiglitz J.E. (1976). Equilibrium in competitive insurance markets: An essay on the economics of imperfect information. *The Quarterly Journal of Economics,* 90 (4), 629–649.

Sandomirskaia M. (2014). A model of tacit collusion: Nash-2 Equilibrium concept. *HSE Working papers, WP BRP 70/EC/2014.* National Research University Higher School of Economics.

Skaperdas S. (1994). Contest success functions. *Economic Theory*, 7, 283–290.

Tian G. (2009). Existence of equilibria in games with arbitrary spaces and payoffs: A full characterization. *Working paper, TX.* Texas A&M University Press.

Tullock G. (1967). The welfare costs of tariffs, monopoly and theft. *Western Econ. J.,* 5, 224–232.

Wilson C. (1977). A model of insurance markets with incomplete information. *J. Econ. Theory* 16 (2), 167–207.

Поступила в редакцию 18.11.2021

Received 18.11.2021

M.B. Iskakov
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow

Existence theorems for Nash equilibrium and equilibrium in secure strategies

Abstract. The paper proposes a method for constructing existence theorems for equilibrium in secure strategies (EinSS) on the basis of the well-known existence theorems for Nash equilibrium. The system of definitions of the EinSS is interpreted as the development of the logic of rational behavior in the definition of Nash equilibrium. It is proved that under the condition of «strong threats» for the existence of EinSS, it is sufficient to fulfill the conditions of the known existence theorem for the Nash equilibrium only on the sets of secure strategies. This statement is formulated both globally and locally, and is an effective tool for application to practical problems. It opens up the possibility of constructing various particular existence theorems for EinSS. As a demonstration of the proposed approach, from the Debreu's theorem of the existence of social equilibrium, the corresponding theorem of the existence of the EinSS is obtained.

Keywords: *equilibrium in secure strategies, Nash equilibrium, competitive deviations, non-competitive deviations, Nash equilibrium existence theorems, rational choice theory.*

JEL Classification: C72.

For reference: **Iskakov M.B.** (2022). Existence theorems for Nash equilibrium and equilibrium in secure strategies. *Journal of the New Economic Association*, 4 (56), 12–27. DOI: 10.31737/2221-2264-2022-56-4-1