В.И. Данилов
Центральный экономико-математический институт РАН, Москва

Стабильные системы гибких договоров[1]

Аннотация. В работе изучаются системы парных договоров-контрактов между агентами двух комплементарных групп (рабочие и фирмы, учащиеся и вузы, вкладчики и банки). Допускаются множественные контракты, а также гибкие контракты, когда контракт заключается с некоторой интенсивностью. Предпочтения агентов описываются с помощью функций выбора. Показано, что если эти функции выбора удовлетворяют условию, которое мы называем консервативностью, то существуют так называемые стабильные системы договоров, когда никакой паре контрагентов невыгодно изменять заключенные договора. Существование стабильной системы договоров устанавливается с помощью трансфинитного процесса последовательного приближения, обобщающего классический алгоритм Гейла–Шепли. Как следствие, мы избавляемся от условий конечности множества договоров. Изучаются также такие свойства стабильных систем договоров, как поляризация и решеточность.

Ключевые слова: *функция выбора, алгоритм Гейла–Шепли, паросочетания, решетка.*

Классификация JEL: C71, C78, D49, D86.

DOI: 10.31737/2221-2264-2021-51-3-1

1. Введение

При экономических или социальных взаимодействиях агентам часто приходится заключать парные договора или контракты. Примеры таких взаимодействий многочисленны – брачные контракты между мужем и женой, договор найма на работу между рабочим и фирмой, поступление учащегося в вуз или школу, договор вклада или кредита между индивидумом и банком, договора между государствами. Один из важных вопросов для таких контрактов – стабильность системы договоров. Допустим, что уже имеется какая-то система договоров и некоторая пара агентов видит возможность заключить новый взаимовыгодный договор, хотя при этом могут быть расторгнуты некоторые старые договоренности. Такая возможность указывает на некий дефект в существующей системе договоров. Система договоров называется стабильной (устойчивой), когда таких стимулов к изменению нет.

Теоретическое изучение вопроса о стабильности было начато в знаменитой статье (Gale, Shapley, 1962). Она относилась к ситуации «поступления в колледжи». Можно ли так распределить соискателей по школам, чтобы результат был стабильным в указанном выше смысле? Авторы показали, что такое возможно, и предложили алгоритм (процедуру) получения такого распределения. Конечно, все это было сделано при некоторых предположениях, достаточно невинных с математической точки зрения, но все же упрощающих реальное положение. Последовавшие за этой статьей работы были посвящены обобщениям постановок задачи и поиску дополнительных свойств стабильных назначений.

[1] Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-010-00569-А). Я хотел бы отметить Дэниэла Леманна, недавняя работа которого побудила меня обратиться к этой теме.

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Одно из обобщений было связано с рассмотрением так называемой ситуации «many-to-many», когда в ситуации найма не только фирма может нанять нескольких рабочих, но и рабочий мог работать в нескольких фирмах. Для существования стабильных назначений здесь нужно накладывать более серьезные требования к предпочтениям участников. В частности, участники должны выражать предпочтения не только по отношению к индивидуумам противоположной стороны (или к отдельным договорам с ними), но и к наборам (подмножествам) контрагентов или договоров. Эти требования удобно выражать в терминах функций выбора. А именно в виде требования «независимости от пути», введенного Плоттом в (Plott, 1973) и исследованного затем в ряде работ (Blair, 1988; Aizerman, Malishevski, 1981; Danilov, Koshevoy, 2005).

В настоящей работе мы изучаем эту проблему в случае двух агентов. Но зато речь будет идти не об одном договоре или контракте, а о множестве потенциальных контрактов. Примером такой ситуации могут быть договора между банком и вкладчиком. Имеется много видов депозитов, отличающихся процентными ставками и другими характеристиками (сроком, условиями досрочного расторжения, периодичностью выплаты процентов и т.п.). Кроме того, каждый договор фиксирует сумму вклада. Так что надо не просто говорить о контракте, а об интенсивности исполнения этого контракта (мы называем такой договор *гибким*). Сколько денег положит вкладчик на каждый депозит, сколько захочет принять банк — это то, что образует систему договоров.

Ограничение случаем двух агентов совершенно несущественное. Так как всех вкладчиков можно рассматривать как одного агрегированного Вкладчика, как и все банки — как один агрегированный Банк. Идея агрегирования и сведения двустороннего рынка к двум участникам не является новой. Такой подход уже был предложен в работах (Fleiner, 2003; Lehmann, 2019). И мы следуем ему по причине простоты изложения; это как обозначение вектора одной буквой вместо задания его списком его координат.

Наша модель похожа на постановки в работах (Alkan, Gale, 2003; Fleiner, 2003; Lehmann, 2019) и в каком-то смысле обобщает их. У (Lehmann, 2019) множество контрактов конечно; кроме того, каждый контракт может либо заключаться, либо нет. В (Fleiner, 2003) автор избавляется от конечности. В работе (Alkan, Gale, 2003) допускаются гибкие контракты. У нас нет предположения конечности и допускаются гибкие контракты. Другое отличие от указанных работ заключается в способе задания алгоритма Гейла–Шепли. Он оказался удобным во многих отношениях.

После краткого исторического обзора мы подробно рассматриваем описание предпочтений с помощью функций выбора. Понятие стабильной системы договоров для двух участников обсуждается в разд. 4. Ключевой алгоритм построения стабильной системы описывается

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

в разд. 5. В разд. 6 полученные результаты обобщаются на случай произвольного числа участников.

2. Немного истории

Хотя теория началась со скромной статьи (Gale, Shapley, 1962) в журнале для студентов, предложенный авторами алгоритм был реализован за десять лет до этого, без всякой теории. Дело было так. В Америке наметился кризис с распределением интернов по больницам. То есть, видимо, подобный кризис был и в других отраслях, но здесь начали принимать какие-то меры. Больницы старались как можно раньше договориться со студентами медицинских вузов. Чтобы избавиться от этой гонки, было принято решение, что данные о студентах появлялись только в последний год их учебы. Но возникла другая проблема. Допустим, выпускник получал приглашение от некоторой больницы. Что ему делать – принимать приглашение или отказаться и ждать следующего? Можно бы и подождать, но если все будут придерживаться такой тактики, то никто и не получит следующего предложения. Потому что новое предложение может поступить только если какой-то соискатель откажется от сделанного ему предложения и тогда клиника обратится к следующему по привлекательности выпускнику и вышлет ему предложение. Клиники были заинтересованы в скорейшем принятии или отклонении сделанного предложения, а поэтому после его отправки звонили выпускнику, чтобы побудить его принять решение. А что было делать бедному претенденту? Принимать, может быть, не самое лучшее предложение или отказываться и надеяться получить более привлекательное? Рисковала и клиника – вдруг отказ придет в последний момент и она не успеет найти замену.

Одним словом, нервотрепка и хаос были для обеих сторон. И вот в 1951 г. удалось найти удовлетворительный механизм назначения, эквивалентный (как позже выяснил Рот) механизму отложенного согласия (deterred acceptance) Гейла–Шепли. Главной положительной чертой этого механизма было то, что производимое им назначение было стабильно в том смысле, что никакой паре «интерн – больница» не было выгодно отклоняться от предложенного назначения.

Аналогичная проблема возникла и в России после введения ЕГЭ. Абитуриентам теперь не надо было сдавать вступительные экзамены в вузы, достаточно было сообщить результаты по ЕГЭ. Большое облегчение для обеих сторон. Но кого принимать? Допустим, вуз (или лучше – факультет) получил больше предложений от абитуриентов, чем способен принять. Он отбирает лучших среди них и высылает им сообщения, что они могут быть зачислены. Те, кто не получил сообщения, посылают свои данные в другие вузы (или сразу посылают в несколько вузов). И начинается головная боль и суматоха для обеих сторон. Допустим, абитуриент получает несколько приглашений от нескольких вузов. Он выбирает лучшее предложение и скорее всего не сообщает об

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

отказе остальным вузам. А что делать вузу? Ждать отказа? А придет ли он вообще?.. И получится недобор. Абитуриенты тоже оказываются не в лучшем положении. Вот абитуриент получил единственное и не очень привлекательное предложение. Соглашаться? Или ждать в надежде, что другой, более привлекательный для него, вуз в результате недобора обратится к нему?

Тут бы Министерству образования обратиться к мировому опыту и внедрить уже найденное идеальное решение. Но нет. У нас в России была реализована процедура, которая действовала в США до 2003 г.[2] и страдала теми же недостатками. Однако в 2003 г. Рот поменял эту процедуру на алгоритм Гейла–Шепли и дела в Америке пошли лучше. Мы же позаимствовали самую неудачную старую процедуру. Видимо, потому что Министерство образования мало волнуют страдания вузов и абитуриентов.

Ладно, хватит о грустном. Перейдем к развитию теории. Как уже говорилось, все началось со статьи (Gale, Shapley, 1962), в которой обсуждалась проблема назначения в вузы (college admission) и ее более частный случай — марьяжи, или женитьбы. Здесь надо объяснить, как описывались предпочтения участников — абитуриентов и вузов. С абитуриентами все просто — считается, что они упорядочивают вузы по степени их привлекательности. Вузы тоже упорядочивали абитуриентов и приглашали лучших с учетом квот на прием студентов.

Гейл и Шепли предложили алгоритм отложенного согласия, который приводил к стабильному распределению студентов по вузам. В этой процедуре абитуриенты обращались в вузы, некоторые *временно* (и это главное!) принимались, а отвергнутые повторяли предложения в уже менее привлекательные вузы. Эти вузы делали выбор среди имеющихся соискателей и вновь обратившихся, снова кого-то оставляли, кому-то отказывали, и так далее. Через конечное число итераций процесс заканчивался и давал стабильное распределение абитуриентов. Кроме стабильности, это распределение было в некотором смысле оптимально для студентов. Можно было, конечно, поменять роли, и тогда алгоритм давал распределение, оптимальное уже для вузов.

После появления этой статьи появилось много работ, исследовавших стабильные назначения и предлагавших более общие постановки. Одна линия исследований была связана с более глубоким пониманием структуры множества всех стабильных назначений. Во-первых, оказалось, что если одно такое назначение лучше для студентов, то оно хуже для вузов (и наоборот, так называемая *поляризация*). Во-вторых, множество стабильных назначений является *решеткой*[3], в которой назначение, даваемое алгоритмом, — это наилучший (наибольший) элемент решетки. Важно также, что при использовании этого алгоритма студентам невыгодно было фальсифицировать свои предпочтения, чего не скажешь о другой стороне (вузах). Но эту тему о манипулировании мы не будем обсуждать.

---

[2] Подавать заявки в пять мест, три тура согласия-отказа (Nobel prize, 2012).

[3] Упорядоченным множеством с верхними и нижними гранями.

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Теперь про обобщения. Уже в оригинальной постановке Гейла–Шепли одна сторона (колледжи) могла заключать союз со многими студентами. Это означало, что предпочтения колледжа должны относиться не к индивидуальным студентам, но к их наборам, подмножествам. Гейл и Шепли обошли эту проблему тем, что вводили квоты. При таком предположении задача о колледжах сводилась к марьяжу за счет клонирования колледжей. Важный шаг был сделан Келсо и Кроуфордом (Kelso, Crawford, 1982) в модели «рабочие – фирмы». Они сформулировали важное требование *заменимости* рабочих. Это условие состояло в том, что если колледж (или фирма) принимает некоторого студента (рабочего) в ситуации A, то он принимает его и в более ограниченной ситуации $B \subseteq A$, если этот студент (рабочий) все еще доступен.

Этот сдвиг (от упорядочений к функциям выбора) при описании предпочтений позволил работать в обстановке, когда каждый агент одной стороны мог заключать несколько контрактов с агентами противоположной стороны (постановка many-to-many). При условии, что функции выбора всех агентов удовлетворяли условию *независимости от пути* (об этом более подробно будет сказано в следующем разделе), Рот (Roth, 1984) получил как доказательство существования стабильных систем союзов в ситуации many-to-many, так и перенес на нее многие свойства, установленные ранее в ситуации one-to-many. (См. также работу (Echenique, Oviedo, 2006), где была активная агитация за модели many-to-many.)

Стоит отметить еще два теоретических продвижения. Первое было скорее техническим — отказ от конечности множеств участников и/или договоров (Fleiner, 2003). Второе, более принципиальное, состояло в том, что допускалось исполнение контрактов с некоторой интенсивностью. Последнее проще всего пояснить на примере «банк – вкладчик», где договор о депозите включает в себя такой важный параметр, как размер вклада, или «найм рабочих», где параметром будут часы работы. Это обобщение было инициировано (Baiou, Balinski, 2002) и развито в (Alkan, Gale, 2003; Komornik V., Komornik Z., Viauroux, 2010). И настоящее исследование — это некий синтез работ (Fleiner, 2003) и (Alkan, Gale, 2003).

Стоит указать одно неявное предположение, принимаемое во всех этих моделях. Оно может быть названо *отсутствием экстерналий*. В примере с поступлением в вуз абитуриент, оценивая вуз, не принимает в расчет тех, с кем будет учиться. Аналогично фирма, принимая рабочего, не заботится о том, где он еще работает. Эти гипотезы не всегда оправданы. Например, при приеме интернов возникла проблема с семейными парами, которые хотели бы работать если не в одной клинике, то хотя бы в одном городе. Этому предположению посвящено много работ, но мы не будем их перечислять. Уповая, как Гейл и Шепли, на то, что «некоторые идеи... могут быть полезны применительно к некоторым фазам задачи о назначении».

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

3. Описание одного агента

Наша модель состоит в том, что два агента (или две группы агентов) могут заключать любые договора из некоторого доступного множества C, причем каждый договор можно заключить с некоторой интенсивностью. Интенсивность договора $c \in C$ принадлежит некоторому линейно упорядоченному множеству $(L(c), <_c)$. Про $L(c)$ предполагается, что они полные в том смысле, что любое непустое подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани. В частности, существует минимальный элемент 0_c и максимальный элемент 1_c. Например, $L(c)$ может быть конечным множеством или компактным подмножеством в $\mathbb{R}$. Это предположение о полноте не очень существенное в силу возможности пополнения.

Системой договоров между нашими агентами называется сопоставление X каждому типу договоров $c \in C$ той интенсивности $X(c) \in L(c)$, с которой он должен исполняться. Таким образом, систему договоров надо понимать как функцию, заданную на множестве C. Более точно, пусть $L(C) = \coprod_{c\in C} L(c)$ – прямая сумма множеств $L(c)$ вместе с естественной проекцией на C; тогда система договоров – это сечение этой проекции. Для краткости элементы C мы называем *направлениями*, а системы договоров – *состояниями* (или назначениями). Множество всех состояний – это прямое произведение $L = \prod_c L(c)$. Классический случай – это когда все $L(c) = \{0,1\}$; в этом случае состояние – это подмножество заключенных договоров. Множество L всех состояний покоординатно упорядочивается и является полной дистрибутивной решеткой с операциями верхней грани (супремума) $\vee$ и нижней грани (инфимума) $\wedge$.

Предпочтения агентов относительно состояний будут описываться с помощью функций выбора (ФВ). В классическом случае для каждого допустимого множества $A \subseteq C$ агент указывает то подмножество $f(A) \subseteq A$, которое (по определению) является наилучшим для него. Так что в классическом случае функция выбора – это отображение $f: 2^C \to 2^C$, сжимающее, в том смысле, что $f(A) \subseteq A$ для любого $A \subseteq C$.

В общем случае *функцией выбора* на решетке L называется отображение $f: L \to L$, сжимающее, в том смысле, что $f(X) \le X$ для любого состояния $X \in L$. Интуитивно это означает, что если агенту предложена система договоров X, он может единолично снизить интенсивность любого договора. Покупателя нельзя заставить купить больше, чем он хочет. Равно как и продавца продать больше, чем он хочет.

Разумеется, интерес представляют функции выбора, которые в каком-то смысле рациональны. Приведем два простых примера.

1. Агент упорядочивает множество C по привлекательности и старается сначала заполнить наиболее привлекательное направление; дойдя до конца, начинает заполнять следующее по привлекательности направление и т.д., пока у него не кончатся деньги.

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

2. Агент старается диверсифицировать свои вклады и по возможности поровну заполнять все направления.

Конечно, эти примеры не исчерпывают рационального поведения и выбора. В классическом случае было обнаружено, что хорошее условие на функции выбора состоит в так называемом условии независимости от пути, введенном Плоттом (Plott, 1973). Такие ФВ Плотта обладают двумя свойствами, которые в теории выбора называются условиями наследования и отбрасывания. Оба условия, естественно, переносятся на случай более общих решеток. В работе (Komornik et al., 2010) было замечено, что эти условия могут быть заменены одним, которое тоже переносится на решетки. Приведем эти условия, а затем получим следствия из них. Хотя многие понятия можно сформулировать для произвольной решетки L, будем предполагать, что L — это произведение линеек.

Определения. Пусть $f : L \to L$ — функция выбора.

1. f называется *персистентной*[4], если $X \leq Y$ влечет $f(Y) \wedge X \leq f(X)$.
2. f называется *консистентной*[5], если $f(X) \leq Y \leq X$ влечет $f(X) = f(Y)$.
3. f называется *консервативной*[6], если $f(X) \leq Y$ влечет $f(Y) \wedge X \leq f(X)$.
4. f называется *независимой от пути*, если $f(\vee_i X_i) = f(\vee_i f(X_i))$ для любого семейства состояний $(X_i, i \in I)$.

Смысл условия консервативности состоит в том, что если в некоторой ситуации нечто не выбирается при наличии $f(X)$, оно не выбирается в любой другой ситуации при наличии $f(X)$. В классической ситуации консервативность эквивалентна независимости от пути, но не в общем случае, как можно увидеть уже на примере одной линейки.

Предложение 1.

1. *ФВ f консервативна тогда и только тогда, когда она персистентна и консистентна.*

2. *Консервативная ФВ является независимой от пути.*

Доказательство.

1. Пусть f консервативна. Если $X \leq Y$, то тем более $f(X) \leq Y$ и мы получаем персистентность. Пусть теперь $f(X) \leq Y \leq X$. Забывая про X, мы имеем $f(Y) \wedge X \leq f(X)$. Так как $f(Y) \leq Y \leq X$, то $f(Y) \wedge X = f(Y)$ и, следовательно, $f(Y) \leq f(X)$. А из персистентности, примененной к неравенству $Y \leq X$, вытекает $f(X) \wedge Y \leq f(Y)$. Так как $f(X) \leq Y$, то $f(X) \wedge Y = f(X)$, откуда $f(X) \leq f(Y)$, т.е. $f(X) = f(Y)$. Это доказывает консистентность.

Обратно, пусть f персистентна и консистентна. И пусть $f(X) \leq Y$. Обозначим $Z = X \wedge Y$. Тогда очевидно, что $f(X) \leq Z$. Применяя консистентность к $f(X) \leq Z \leq X$, мы имеем равенство $f(X) = f(Z)$. А теперь применим персистентность к неравенству $Z \leq Y$ и получим $f(Y) \wedge Z \leq f(Z) = f(X)$. Но $f(Y) \wedge Z = f(Y) \wedge X$, так что $f(Y) \wedge X \leq f(X)$. То есть ФВ f консервативна.

[4] Называется также наследственностью, или заменимостью.

[5] Называемая также отбрасыванием, или локальной монотонностью.

[6] (Alkan, Gale, 2003) использовали термин «стационарность».

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

2. Пусть дано семейство $(X_i,\ \ i \in I)$; для краткости обозначим $Z = \vee_i X_i$. Применяя персистентность к неравенству $X_i \le Z$, мы имеем $f(Z) \wedge X_i \le f(X_i)$ для каждого i. Переходя к супремуму, мы имеем $\vee_i (f(Z) \wedge X_i) \le \vee_i f(X_i)$. Пользуясь дистрибутивностью, левую часть можно переписать как $\vee_i (f(Z) \wedge X_i) = f(Z) \wedge (\vee_i X_i) = f(Z) \wedge Z = f(Z)$. Так что мы получаем неравенство $f(Z) \le \vee_i f(X_i)$. Применение к нему консистентности дает равенство $f(Z) = f(\vee_i f(X_i))$, т.е. независимость от пути. ■

Следствие. $f(f(X)) = f(X)$.

В этом разделе мы изучим свойства консервативных ФВ. Дело в том, что далее мы всюду будем предполагать выполненным свойство консервативности. Однако потребовать консервативность легко; другое дело, существуют ли такие функции выбора и много ли их. Приведенные выше два примера показывают, что таких функций выбора довольно много. Полное описание консервативных ФВ, обобщающее теорему Айзермана–Малишевского, дается в работе (Danilov, 2021). Нам оно не понадобится, так что ограничимся простейшим случаем одной линейки. В этом случае задать консервативную ФВ — это то же самое, что задать некоторый выделенный элемент X^* в линейке L. Тогда $f(X) = X^*$, если $X^* \le X$ и $F(X) = X$, если $X \le X^*$.

Состояния X, для которых $X = f(X)$, называются *допустимыми*. Дело в том, что только допустимые состояния представляют интерес как системы договоров. Заметим, что состояния, меньшие допустимого, тоже допустимы. Множество допустимых состояний, т.е. множество неподвижных точек f, обозначается $Fix(f)$. Отображение f осуществляет ретракцию L на $Fix(f)$. Описание слоев этой ретракции дается в лемме 2. Чтобы ее сформулировать, надо ввести одно важное понятие.

Определение. Отношением *выявленного предпочтения* (или *предпорядком Блэра*, (Blair, 1988)) называется отношение $\preceq = \preceq_f$ на L, которое задается следующим способом: $X \preceq Y$, если $f(X \vee Y) = f(Y)$. Грубо говоря, добавление X к Y не меняет выбора.

Лемма 1.

1. $X \preceq Y$ *тогда и только тогда, когда* $f(X \vee Y) \le Y$.

2. *Отношение* $\preceq$ *рефлексивно и транзитивно.*

3. *На множестве* $Fix(f)$ *допустимых состояний отношение* $\preceq$ *антисимметрично, т.е. является порядком.*

Доказательство.

1. В одну сторону доказывается тривиально. Проверим в другую. Пусть $f(X \vee Y) \le Y$. Тогда $f(X \vee Y) = f(X \vee Y \vee Y) = f(f(X \vee Y) \vee Y) = f(Y)$.

2. Пусть $X \preceq Y$ и $Y \preceq Z$. Тогда $f(X \vee Z) = f(X \vee f(Z)) = f(X \vee f(Y \vee Z)) = f(X \vee Y \vee Z) = f(f(X \vee Y) \vee Z) = f(Y \vee Z) = f(Z)$.

3. Пусть X и Y допустимые, $X \preceq Y$ и $Y \preceq X$. Тогда $Y = f(Y) = f(X \vee Y) = f(X) = X$. ■

Лемма 2. *Пусть* $X \in L$ *и* $A = f^{-1}(f(X))$ *– слой f над* $f(X)$. *Тогда:*

1) $A = \{Y \in L, Y \approx X\}$;

2) *A содержит наибольший элемент, обозначаемый далее как* $f^*(X)$*; в частности,* $f(f^*(X)) = f(X)$;

3) *A является интервалом между* $f(X)$ и $f^*(X)$.

Доказательство.

1. Пусть $Y \approx X$, т.е. $f(X) = f(X \vee Y) = f(Y)$. Это дает включение $\subseteq$. Обратное столь же очевидно.

2. Пусть Z — супремум (джойн) всех Y из A (так что $f(Y) = f(X)$). Тогда $f(Z) = f(\vee Y) \le \vee f(Y) = f(X) \le X \le Z$. Из консистентности $f(Z) = f(X)$.

3. Очевидно, что любой Y из A лежит между $f(X)$ и $f^*(X)$. Обратно, пусть $f(X) \le Y \le f^*(X)$. Так как $f(f^*(X)) = f(X)$ (см. п. 2)), то из консистентности получаем $f(Y) = f(X)$. ■

Сравним теперь $f(X)$ и $f^*(X)$ как функции на C. Местами они совпадают, местами первая функция меньше второй.

Определения. Направление $c \in C$ называется *закрытым* для X (соответственно, *свободным*), если $f(X)(c) = f^*(X)(c)$ (соответственно $f(X)(c) < f^*(X)(c)$).

Интуитивное понимание тут такое: если мы ослабим ограничение в закрытом направлении c, т.е. возьмем функцию Y, которая всюду совпадает с $f(X)$, кроме c, а в c больше, чем $f(c)$, то $f(Y)$ немного приподнимется (продвинется) в направлении c (быть может, опускаясь-отступая по другим направлениям). В противном случае $f(Y) \le X \le Y$, и из консистентности получаем $f(Y) = f(X)$, т.е. $Y \le f^*(X)$ и направление c свободное. Если же мы ослабим ограничение в свободном направлении, ничего не изменится. Это утверждает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть X – допустимое состояние и* $Y \ge X$. *Если* $f(Y)(c) > X(c)$, *то направление c закрыто для X.*

Это свойство в (Alkan, Gale, 2003) принималось за определение закрытого направления (точнее, они определяли свободные направления). Докажем лемму 3.

Разобьем Y на две части: Y_1, равную Y в закрытых направлениях и равную X в свободных. И Y_2, равную Y в свободных направлениях и равную X в закрытых. Ясно, что $Y_1, Y_2 \ge X$ и $Y_1 \vee Y_2 = Y$. Кроме того, $f(Y_2) = X$, поэтому $f(Y) = f(Y_1 \vee Y_2) = f(Y_1 \vee f(Y_2)) = f(Y_1 \vee X) = f(Y_1)$.

Если в направлении c состояние $f(Y) = f(Y_1)$ строго больше X, то Y_1 тоже больше X, а это по построению может быть только для закрытого направления c. ■

Лемма 4. *Если c – свободное направление для состояния X, то* $f^*(X)(c) = 1_c$. *Иначе говоря, если* $f^*(X)(c) < 1$, *то* $f(X)(c) = f^*(X)(c)$.

Доказательство. Можно считать, что X — допустимое состояние, т.е. $X = f(X)$. Образуем функцию Z на C, которая совпадает с $f^*(X)$ в закрытых направлениях и равна 1 в свободных. Понятно, что $f^*(X) \le Z$. Применяя к этой паре условие персистентности, получаем

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

неравенство $f(Z) \wedge f^*(X) \le f(f^*(X)) = X$.

Если c — любое свободное направление, то $X(c) < f^*(X)(c)$, откуда $f(Z)(c) \le X(c)$. Если же c — закрытое направление, то $f(Z)(c) \le Z(c) = X(c)$ тоже не больше $X(c)$. Так что $f(Z) \le X$. Применяя к этой паре условие консистентности, имеем $f(Z) = f(X) = X$. Поэтому $Z \le f^*(X)$, что и доказывает лемму. ■

Говоря неформально, агент (находясь в состоянии X) желал бы увеличить свой вклад в закрытых направлениях и вполне доволен вкладом в свободных, насыщенных.

Следствие. *Если X допустимое состояние и $X \prec Y$, то $X(c) < Y(c)$ для некоторого закрытого (для X) направления c.*

В самом деле, пусть $Y \le X$ во всех закрытых направлениях. Образуем $Z = Y \vee X$. Тогда Z совпадает с X в закрытых направлениях и $\ge X$ в свободных. То есть $X \le Z \le f^*(Z)$, откуда $f(X \vee Y) = f(Z) = f(X)$, так что $Y \preceq X$.

Понятия f, f^* и $\preceq$ тесно связаны друг с другом. Например, имеет место такая лемма.

Лемма 5. *Эквивалентны утверждения:*

a) $X \preceq Y$;

b) $X \le f^*(Y)$;

c) $f^*(X) \le f^*(Y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $c) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow a)$ по транзитивности: $X \preceq f^*(Y) \preceq Y$. Остается показать импликацию $a) \Rightarrow c)$. Консервативность дает $f(f^*(X) \vee Y) = f(f(f^*(X)) \vee Y) = f(f(X) \vee Y) = f(X \vee Y) = f(Y)$. Но это значит (в силу леммы 2), что $f^*(X) \vee Y \le f^*(Y)$, и тем более $f^*(X) \le f^*(Y)$. ■

Следствие. f^* *– возрастающее, монотонное и идемпотентное отображение. Иначе говоря, является оператором замыкания. Более того, выполнено соотношение $X \le f^*(f(X))$ для любого X (свойство Минковского–Крейна–Мильмана (свойство МКМ)).*

Монотонность была показана в лемме 4, идемпотентность очевидна. Свойство МКМ тоже следует из леммы 4, так как $X \preceq f(X)$.

ФВ f (как и порядок $\preceq$) восстанавливаются по отображению f^*. А именно $f(X)$ — это наименьшее состояние Y, для которого $f^*(Y) = f^*(X)$. Можно, наверное, показать, что если f^* — оператор замыкания со свойством МКМ, то определенная выше ФВ f будет консервативной. Во всяком случае это так в классической ситуации.

4. Стабильные состояния: два агента

До сих пор мы обсуждали случай одного агента и его предпочтения на решетке L, заданные через ФВ f или через порядок $\preceq$. Теперь обсудим случай двух агентов. Для наглядности будем считать, что первый агент — это банк, а второй — вкладчик. C — это множество видов вкладов (депозитов), отличающихся процентной ставкой и другими условиями (длительность вклада, возможности расторжения и пр.).

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Интенсивность вклада в направлении $c \in C$ можно понимать как количество денег, помещенных на этот вид вклада. Ясно, что нельзя заставить вкладчика положить больше денег, чем он хочет, и нельзя заставить банк принять больше, чем ему нужно. Но если оба агента согласны увеличить какой-то вклад, то они могут это сделать.

Предположим, что первый агент руководствуется консервативной ФВ f (или соответствующим порядком Блэра $\preceq_f$), а второй — консервативной ФВ g.

Определение. Состояние $X \in L$ называется *стабильным*, если выполнены два условия:

1) X допустимо как первым, так и вторым агентом, $f(X) = X = g(X)$.
2) никакое направление $c \in C$ не может быть закрытым для состояния X и относительно f, и относительно g.

Второе условие требует некоторого пояснения. Если направление c закрыто для обоих участников, они могут договориться немного повысить состояние X в этом направлении c. Как объяснялось выше, это будет выгодно для обоих. Оба агента в таком случае согласятся увеличить количество денег на вкладе c. При этом они могут по-разному уменьшать остальные вклады. Так что измененные состояния агентов могут не совпадать. Но в любом случае исходное состояние X не может считаться стабильным.

Но можно ли считать совершенно стабильным состояние X, для которого выполнены свойства 1 и 2? В принципе могло бы случиться, что (несмотря на условие 2)) имеется состояние Y, которое строго лучше, чем X, и для первого, и для второго агента. И это не гипотетическая возможность — в работе (Sotomayor, 1999) приводится соответствующий пример. Это связано с тонким различием между так называемой попарной стабильностью и сет-стабильностью (множественной стабильностью). Об этом упоминается в (Alcan, Gale, 2003; Echenique, Oviedo, 2006). Тем не менее мы будем понимать стабильность так, как сказано выше в определении.

Условие 2 можно переписать в виде $f^*(X) \vee g^*(X) = 1$ или в терминах стабильной пары.

Определение. *Стабильной парой* называется такая пара (Z, Y) состояний, что: 1´) $f(Z) = g(Y)$; 2´) $Z \vee Y = 1$.

Лемма 6. *Если X – стабильное состояние, то пара $(f^*(X), g^*(X))$ стабильна. Обратно, если пара (Z, Y) стабильна, то $X = f(Z) = g(Y)$ – стабильное состояние.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение очевидно в силу $f(f^*(X)) = f(X) = X$ и аналогично для g. Что касается второго, то оно очевидно в силу $Z \le f^*(f(Z)) = f^*(Z)$ и аналогичного неравенства для Y. ■

Приведем некоторые важные свойства стабильных состояний.

Лемма 7 (сравни с леммой 10 (Alcan, Gale, 2003) и с леммой 20 (Lehmann, 2019)). *Пусть X – стабильное состояние и $A = f(A)$. Если $X \preceq_f A$, то $A \preceq_g X$.*

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Y = A \vee X$ и $Z = g(Y)$. Ясно, что $A \le Y$, поэтому $A \preceq_g g(Y)$. Если $g(Y) \le X$, то $A \preceq_g X$. Поэтому можно считать, что для некоторого направления c мы имеем $g(Y)(c) > X(c)$. По лемме 3 направление c является g-закрытым для состояния X. Но тогда (см. определение стабильности) c будет f-свободным для X. И по той же лемме 3 (примененной на этот раз к f) $f(Y)(c) = X(c)$. Но $f(Y) = f(A \vee X) = f(A) = A$, так что $X(c) = A(c)$. Тогда $g(Y)(c) \le Y(c) = X(c)$, что противоречит $g(Y)(c) > X(c)$. ■

Следствие (поляризация). *Порядки* $\preceq_f$ и $\preceq_g$ *на множестве* **St** *стабильных состояний взаимно противоположны.*

Иначе говоря, интересы агентов по поводу стабильных состояний прямо противоположны (антагонистичны). Но это еще не все. Оказывается, что множество **St** стабильных состояний является (полной) решеткой относительно порядка $\preceq_f$ (или $\preceq_g$). В частности, существует стабильное состояние, наиболее выгодное с точки зрения первого агента (банка). Для установления этих фактов (хорошо известных в классической постановке), как и для доказательства существования стабильных состояний, нам придется обратиться к процедуре построения таких состояний.

5. Процесс последовательного улучшения

В классической (конечной булевой) ситуации задача существования стабильных состояний решается либо алгоритмом Гейла–Шепли, либо методом неподвижной точки Тарского (Fleiner, 2003). Здесь метод Флейнера не годится (либо мне не удалось его приспособить), и приходится, вслед за (Alkan, Gele, 2003), использовать идею алгоритма Гейла–Шепли. А он состоит в серии последовательных улучшений.

Определение. *Полустабильной парой* называется пара (Z,Y) состояний, таких что выполнены условия: 1´) $Y \vee Z = 1$; 3´) $g(Y) \le f(Z)$.

Если неравенство в 3´) выполнено как равенство, мы получаем стабильную пару, т.е. (см. лемму 6) стабильное состояние.

Построение стабильной пары осуществляется с помощью последовательных модификаций (улучшений) некоторой исходной полустабильной пары (в качестве таковой можно взять пару $(1,0)$). Каждый шаг улучшения состоит в переходе от пары (Z,Y) к новой полустабильной (см. лемму 8) паре $\Phi(Z,Y) = (Z',Y')$, которая определяется так:

$$Y' = Y \vee g^*(f(Z)),$$

$$Z'(c) = \begin{cases} Z(c), & \text{если} \quad g(f(Z)(c)) = f(Z)(c), \\ g(f(Z))(c), & \text{если} \quad g(f(Z)(c)) < f(Z)(c). \end{cases}$$

Очевидно, что $Y \le Y'$, $Z' \le Z$. Так что процесс идет в каком-то смысле монотонно. И можно надеяться, что он стабилизируется и мы получим неподвижную точку отображения Φ. А она окажется уже стабильной парой, как утверждает лемма 7.

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Лемма 7. *Если пара* (Z,Y) *полустабильна и* $(Z',Y')=(Z,Y)$, *то эта пара стабильна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы имеем:

a) $Y=Y'$, т.е. $g^*(f(Z))\le Y$,

b) $Z'=Z$, т.е. $g(f(Z))=f(Z)$.

В силу условия a) можно записать $g(Y)=g(Y\vee g^*(f(Z)))=g(g(Y)\vee f(Z))$, а в силу полустабильности — $g(Y)\le f(Z)$, так что $g(Y)\vee f(Z)=f(Z)$, и мы можем продолжить $g(g(Y)\vee f(Z))=g(f(Z))=f(Z)$. Последнее равенство видно из b). ■

Наивно было бы думать, что процесс стабилизируется через конечное число шагов, он может продолжаться бесконечно. А тогда приходится переходить к пределу и снова повторять его. И тут надо проверять, что: 1) пара $\Phi(Z,Y)$ полустабильна; 2) предельная пара тоже полустабильна.

Лемма 8. *Если пара* (Z,Y) *полустабильна, то пара* (Z',Y') *тоже полустабильна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно доказать, что $Z'\vee Y'=1$ и что $g(Y')\le f(Z')$.

1. Нужно проверить только для таких направлений *c*, в которых Z' уменьшилось по сравнению с *Z*, т.е. там, где $g(f(Z))(c)<f(Z)(c)$. Но для такого *c* выполнено $g^*(f(Z))(c)=1$ по лемме 4, примененной к $f(Z)$.

2. Так как $Z'\le Z$, из персистентности мы имеем $f(Z)\wedge Z'\le f(Z')$. Однако

$$g(Y')=g(Y\vee g^*(f(Z)))=g(g(Y)\vee g^*(f(Z))).$$

А так как $g(Y)\le f(Z)\le g^*(f(Z))$, мы можем продолжить равенство и получить $g(Y')=g(g^*(f(Z)))=g(f(Z))\le f(Z)$. Но $g(f(Z))\le Z'$, поэтому $g(Y')=g(f(Z))\le f(Z)\wedge Z'\le f(Z')$. ■

Теперь, начиная с некоторой полустабильной пары $P_0=(Z,Y)$, мы строим $P_1=\Phi(P_0)$, $P_2=\Phi(P_1)=\Phi^2(P_0)$, и так далее. Более точно, для каждого ординального числа α мы строим пару $P_\alpha=\Phi^\alpha(P_0)$ по рекурсивному правилу:

a) если α — непредельное ординальное число и равно $\beta+1$, то $P_\alpha=\Phi(P_\beta)$;

b) если α предельное число, то $P_\alpha=(Z_\alpha,Y_\alpha)$, где $Z_\alpha=\inf(Z_\beta,\beta<\alpha)$, $Y_\alpha=\sup(Y_\beta,\beta<\alpha)$.

Здесь мы должны проверить следующую лемму.

Лемма 9. *Если* α *– предельное число, то пара* (Z_α,Y_α) *полустабильна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение $Z_\alpha\vee Y_\alpha=1$ очевидно. При проверке второго неравенства (что $g(Y_\alpha)\le f(Z_\alpha)$) мы можем считать, что для $\beta<\alpha$ аналогичное неравенство выполнено. Для краткости обозначим $Y=Y_\alpha$ и $Z=Z_\alpha$.

Покажем, что для любого $\beta<\alpha$ выполнено неравенство $g(Y)\le Z_\beta$. В самом деле, *Y*, как видно из его построения, равно $Y_\beta\vee(\vee_{\beta\le\gamma<\alpha}g^*f(Z_\gamma))$. Поэтому

$$g(Y)=g(Y_\beta\vee(\vee_{\beta\le\gamma<\alpha}g^*f(Z_\gamma))=g(g(Y_\beta)\vee(\vee_{\beta\le\gamma<\alpha}f(Z_\gamma)).$$

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Так как по индуктивному предположению

$$g(Y_\beta) \le f(Z_\beta) \le \vee_{\beta\le\gamma<\alpha} f(Z_\gamma),$$

последнее выражение можно переписать как $g(\vee_{\beta\le\gamma<\alpha} f(Z_\gamma))$. А оно не больше, чем $\vee_{\beta\le\gamma<\alpha} f(Z_\gamma))$. А это, в свою очередь, $\le \vee_{\beta\le\gamma<\alpha} Z_\gamma \le Z_\beta$. Собирая все неравенства, мы получаем $g(Y) \le Z_\beta$.

Так как это неравенство выполнено для любого $\beta < \alpha$, а $Z = \inf(Z_\beta)$, то $g(Y) \le Z$.

Применяя персистентность ФВ g к неравенству $Y_\beta \le Y$, мы имеем неравенства $g(Y) \wedge Y_\beta \le g(Y_\beta) \le f(Y_\beta)$. Пересекая все с Z, получаем неравенство $g(Y) \wedge Z \wedge Y_\beta \le f(Z_\beta) \wedge Z \le f(Z)$, где второе неравенство следует из персистентности f применительно к $Z \le Z_\beta$. Неравенство $g(Y) \wedge Z \wedge Y_\beta \le f(Z)$ выполнено для любого $\beta < \alpha$, поэтому можно перейти к пределу. Точнее, $\sup_\beta(g(Y) \wedge Z \wedge Y_\beta) \le f(Z)$.

В силу дистрибутивности выполнено

$$\sup_\beta(g(Y) \wedge Z \wedge Y_\beta) = g(Y) \wedge Z \wedge (\sup_\beta Y_\beta) = g(Y) \wedge Z \wedge Y = g(Y) \wedge Z,$$

так как $g(Y) \le Y$. Таким образом, $g(Y) \wedge Z \le f(Z)$. А так как $g(Y) \le Z$, то $g(Y) \wedge Z = g(Y)$. ■

Собирая вместе леммы 8 и 9, получаем следствие.

Следствие. *Если начальная пара* $P_0 = (Y,Z)$ *полустабильна, то* $\Phi^\alpha(P_0)$ *полустабильна для любого ординального числа* α.

Так как (трансфинитная) последовательность $\Phi^\alpha(P_0)$ монотонна, она стабилизируется, т.е. для некоторого α выполняется $\Phi^\alpha(P_0) = \Phi^{\alpha+1}(P_0)$. Иначе говоря, обозначая $\Phi^\alpha(P_0)$ как (Z,Y), мы имеем $(Z,Y) = (Z',Y')$. А тогда по лемме 7 неподвижная пара (Z,Y) стабильна. Это доказывает следующую теорему.

Теорема 1 (существование). *Стабильные состояния существуют, если функции выбора участников консервативные.*

Однако алгоритм не только строит конкретное стабильное состояние. Вернемся к нашему процессу улучшения. Мы начинали с полустабильной пары (Z,Y), строили с помощью (трансфинитной) индукции пары (Z_α,Y_α) и в пределе получали уже стабильную пару (Z_∞,Y_∞). Если взять $S_\infty = f(Z_\infty) = g(Y_\infty)$, то полученное состояние S_∞ будет стабильным. Так как Y_α монотонно возрастает, $Y \le Y_\infty$, откуда $Y \preceq_g S_\infty$, как и $g(Y) \preceq_g S_\infty$. Аналогично Z_α монотонно убывают, так что $Z_\infty \le Z$, $S_\infty \preceq_f Z$ и $S_\infty \preceq_f f(Z)$.

Таким образом, для первого участника (с ФВ f) результирующее стабильное состояние не лучше ($\preceq_f$), чем исходное Z (а для второго результат лучше исходного Y). Важный факт состоит в том, что если S – стабильное состояние и $S \preceq_f Z$, то $S \preceq_f S_\infty$. Грубо говоря, процесс строит стабильное состояние, ближайшее к исходной точке.

Теорема 2 (оптимальность). *Если* S *стабильно и* $S \preceq_f Z$, *то* $S \preceq_f S_\infty$. *Симметрично* $Y \preceq_g S_\infty \preceq_g S$.

Доказательство представляет небольшую модификацию доказательства теоремы 2 в (Alkan, Gale, 2003). А именно покажем, что $S \le Z_\infty$, тогда $S \preceq_f f(Z_\infty) = S_\infty$.

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Предположим, что это не так, т.е. для некоторого направления c выполнено $S(c) > Z_\infty(c)$. Это означает, что для некоторого α $S(c) > Z_\alpha(c)$. Возьмем такое минимальное α; оно непредельное, $\alpha = \beta + 1$. И мы имеем $Z_\beta(c) \geq S(c)$, но $Z_{\beta+1}(c) < S(c)$. Вспоминая, как строилась последовательность Z_β, мы получаем, что в этот момент $g(f(Z_\beta))(c) < f(Z_\beta)(c)$.

Кроме того, $Z_{\beta+1}(c) = g(f(Z_\beta))(c)$ и это $< S(c)$. Чтобы не писать далее β, можно считать, что Z_β – это и есть начальный Z. Так что мы имеем $g(f(Z))(c) < f(Z)(c)$, $g(f(Z))(c) < S(c)$.

Так как $S \preceq_f f(Z)$, то по лемме 7 $f(Z) \preceq_g S$. Применим персистентность к неравенству $f(Z) \leq f(Z) \vee S$ и ФВ g, получаем $g(f(Z) \vee S) \wedge f(Z) \leq g(f(Z))$.

Так как $f(Z) \preceq_g S$, то $g(f(Z) \vee S) = g(S) = S$. Так что неравенство можно переписать как $S \wedge f(Z) \leq g(f(Z))$. Подставляя в эти функции направление c, мы имеем $\min(S(c), f(Z)(c)) \leq g(f(Z))(c)$. Но согласно двум неравенствам выше $g(f(Z))(c)$ меньше как $S(c)$, так и $f(Z)(c)$. Получаем противоречие. ■

Важным следствием этого результата является теорема о решеточности. Для этого нам понадобится следующее обобщение леммы 24 из работы (Lemann, 2019).

Предложение 2. *Пусть* $(S_i, i \in I)$ *– семейство стабильных состояний. Тогда* $g(\vee_i S_i) \leq f(\wedge_i f^*(S_i))$.

Доказательство. Обозначим $Y = \vee_i S_i$ и $Z = \wedge_i f^*(S_i)$. Для начала покажем, что $g(Y) \leq Z$, т.е. $g(Y) \leq f^*(S_j)$ для любого $j \in I$. (Для краткости обозначим S_j как S.)

Предположим, что это не так и для некоторого направления c имеем $g(Y)(c) > f^*(S)(c)$. Уже отсюда видно, что $f^*(S) < 1$, из стабильности S вытекает $g^*(S) = 1$.

Обозначим через X следующую игольчатую функцию, сосредоточенную в направлении c: X равна $g(Y)(c)$ в c и равна 0 всюду, кроме c. Очевидно, что $X \leq g(Y)$. Кроме того, $X \leq g^*(S)$.

Применим персистентность к неравенству $g^*(S) \leq \vee_i g^*(S_i)$, имеем

$$g(\vee_i g^*(S_i)) \wedge g^*(S) \leq g(g^*(S)) = g(S) = S.$$

В силу независимости от пути

$$g(\vee_i g^*(S_i)) = g(\vee_i g(g^*(S_i))) = g(\vee_i S_i) = g(Y),$$

поэтому $g(Y) \wedge g^*(S) \leq S$. Так как $X \leq g(Y)$ и $X \leq g^*(S)$, мы получаем $X \leq S$, и в частности $X(c) \leq S(c) = f(S)(c) \leq f^*(S)(c) < X(c)$. Противоречие. Следовательно, доказано, что $g(Y) \leq Z$.

Осталось убедиться, что $g(\vee_i S_i) \leq f(Z)$. Так как $Z \leq f^*(S_i)$, из персистентности вытекает $f(f^*(S_i)) \wedge Z \leq f(Z)$, т.е. $S_i \wedge Z \leq f(Z)$, и это для любого $i \in I$. Поэтому $\vee_i(S_i \wedge Z) = (\vee_i S_i) \wedge Z = Y \wedge Z \leq f(Z)$. Так как $g(Y)$ не больше Y, а также не больше Z, получаем $g(Y) \leq f(Z)$. ■

Следствие. *Множество стабильных состояний является полной решеткой относительно, скажем, порядка* $\preceq_g$.

Покажем это для случая двух стабильных состояний, S_1 и S_2.

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Положим $Y = S_1 \vee S_2$ и $Z = f^*(S_1) \wedge f^*(S_2)$. В силу предложения 2 имеем $g(Y) \le f(Z)$. Кроме того, $g^*(Y) \ge g^*(S_1) \vee g^*(S_2)$, откуда видно, что пара (Z,Y) полустабильна. Запуская процесс трансфинитного улучшения, приходим к стабильному множеству S, которое обладает двумя свойствами (см. теорему 2): 1) $Y \preceq_g S$, 2) S – минимальное стабильное с этим свойством.

Свойство 1, как легко понять, эквивалентно тому, что $S_1 \preceq_g S$ и $S_2 \preceq_g S$. Поэтому вместе эти свойства означают, что S — точная верхняя грань S_1 и S_2 в множестве **St** стабильных множеств с порядком $\preceq_g$.

Это же расуждение годится для любого набора стабильных состояний. Иногда эта решетка дистрибутивна, но в общем случае нет (Alkan, Gale, 2003; Fleiner, 2003). Алкан и Гейл приводят пример, когда $g(S_1 \vee S_2)$ не является стабильным и действительно надо запускать процесс улучшения.

6. Стабильные состояния – случай многих участников

Теперь рассмотрим случай, когда участников, заключающих договора, много, но они делятся на две противостоящие друг другу группы. Например, вкладчики и банки, профессора и вузы, рабочие и фирмы.

Пусть M обозначает множество агентов первой группы, а W — множество агентов второй группы. Для каждой пары (m,w) имеется множество потенциальных контрактов $C(m,w)$, и каждый контракт c может исполняться с некоторой интенсивностью, заданной линейно упорядоченным множеством L_c. Обозначим через $C(m) = \coprod_w C(m,w)$ множество всех договоров, доступных агенту m; и аналогично для w. Пусть $C = \coprod_{m,w} C(m,w)$.

Предпочтения участников задаются функциями выбора. Для $m \in M$ — функцией выбора f_m на решетке $\prod_{c \in C(m)} L_c$, для $w \in W$ — функцией выбора g_w на решетке $\prod_{c \in C(w)} L_c$. Договора всех агентов — это элемент решетки $L = \prod_{c \in C} L_c$.

Можно поставить вопрос о стабильности систем договоров, которые определяются так же, как и в предыдущих разделах. И если все ФВ консервативные, то стабильные системы существуют и обладают всеми свойствами, как в случае двух участников. Это справедливо, так как можно агрегировать всех агентов первой группы в одного агента M, а агентов второй группы — в агента W. Точнее, агрегируются их ФВ. А именно M имеет ФВ F на L, которая (для функции $X \in L$) задается формулой $F(X) = \bigvee_m f_m(X \mid C(m))$. То есть мы сначала разрезаем C на полоски $C(m)$, ограничиваем функцию X на эти полоски, производим там выбор и затем собираем эти частичные функции $f_m(X \mid C(m))$ в одну глобальную функцию $F(X)$ на C. Аналогично агрегируются функции выбора g_w в единую ФВ G. Имеют место два почти очевидных утверждения.

Лемма 10. *Состояние X является стабильным в исходной постановке тогда и только тогда, когда оно стабильно в агрегированной постановке.*

Журнал НЭА, №3 (51), 2021, с. 12–29

Лемма 11. *Если все ФВ f_m консервативные, то консервативна и агрегированная ФВ F; аналогично для g_w и G.*

Таким образом, все утверждения, доказанные для двух участников, переносятся на случай со многими участниками.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

Aizerman M.A., Malishevski A.V. (1981). General theory of best variants choice. *IEEE Trans. Automatic Control,* AC-26 (5), 1030–1040.

Alkan A., Gale D. (2003). Stable schedule matching under revealed preferences. *J. Econ. Theory,* 112, 289–306.

Baiou M., Balinski M. (2002). The stable allocation (or ordinal transportation) problem. *Math. Oper. Res.,* 27, 485–503.

Blair C. (1988). The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners. *Math. Oper. Res.,* 13, 619–628.

Danilov V., Koshevoy G. (2005). Mathematics of Plott choice functions. *Math. Soc. Sci.,* 49, 245–272.

Danilov V.I. (2021). *Choice functions on posets.* arXiv: 2101.11965 [math.CO].

Echenique F., Oviedo J. (2006). A theory of stability in many-to-many matching markets. *Theoretical Economics,* 1, 233–273.

Fleiner T. (2003). A fixed-point approach to stable matchings and some applications. *Math. Oper. Res.*, 28, 1, 103–126.

Gale D., Shapley L. (1962). College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly,* 69, 9–15.

Kelso A.S., Crawford V.P. (1982). Job matching, coalition formation and gross substitutes. *Econometrica,* 50, 1483–1593.

Komornik V., Komornik Z., Viauroux C. (2012). Stable schedule matchings by a fixed method. *Acta Mathematica Hungarica,* 135, 67–79. arXiv: 1005.2078

Lehmann D. (2019). *Revealed preferences for matching with contracts.* arXiv: 1908.08823

Nobel prize (2012). The prize in economic sciences 2012. The Royal Swedish Academy of sciences. Available at: https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/popular-economicsciences2012.pdf

Plott C.R. (1973). Path independence, rationality, and social choice. *Econometrica,* 41 (6), 1075–1091.

Roth A.E. (1984). Stability and polarization of interests in job matching, *Econometrica,* 52, 47–57.

Sotomayor M. (1999). Three remarks on the many-to-many stable matching problem. *Math. Soc. Sci.*, 38, 55–70.

Поступила в редакцию 14.12.2020

Received 14.12.2020

Журнал НЭА,
№3 (51), 2021,
с. 12–29

V.I. Danilov
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Stable systems of schedule contracts[7]

Abstract. The paper studies the systems of paired contracts between agents of two complementary groups (workers and firms, students and universities, depositors and banks). Multiple contracts are allowed, as well as flexible contracts when the contract is concluded with some intensity. Agent preferences are described using choice functions. It is shown that if these choice functions satisfy the condition that we call conservativeness, then there are so-called stable systems of contracts, when it is unprofitable for any pair of counterparties to change the concluded contracts. The existence of a stable system of contracts is established using the transfinite process of sequential approximation, which generalizes the classical Gale–Shapley algorithm. As a result, we relieved of the finiteness conditions of the set of contracts. Such properties of stable systems as polarization and latticeness are also studied.

Keywords: *choice function, Gale–Shapley algorithm, matching, lattice*

JEL Classification: C71, C78, D49, D86.

DOI: 10.31737/2221-2264-2021-51-3-1

[7] This study was supported by the Russian Foundation for Basic Resear (project 20-010-00569-A). I would like to mention Daniel Lehmann, whose recent work prompted me to address this topic.