Е.М. Бронштейн
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

О.М. Фатхиев
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Замечание о Санкт-Петербургском парадоксе[1]

Аннотация. Санкт-Петербургский парадокс, сформулированный Н. Бернулли в начале XVIII в., привел к введению понятия функции полезности (Д. Бернулли, Г. Крамер) как способа разрешения парадокса и сыграл важную роль в развитии теории принятия решений. В XX в. эта задача привлекла внимание многих исследователей, в том числе нобелевских лауреатов П. Самуэльсона, Р. Аумана, Л. Шепли. Н. Бернулли предполагал, что платежи растут экспоненциально с номером подбрасывания монеты. В обобщенном Санкт-Петербургском парадоксе скорость роста платежей выше экспоненциальной. В этом случае функции полезности Бернулли и Крамера не приводят к разрешению парадокса. В 1934 г. К. Менгер показал необходимость и достаточность ограниченности функции полезности для разрешения обобщенного Санкт-Петербургского парадокса. Приведен краткий обзор литературы по затронутой тематике, а также предложен авторский подход к разрешению классического парадокса, основанный на дисконтировании денежных потоков, в котором особую роль играют временные промежутки между последовательными подбрасываниями монеты. Приведена адаптация предложенного подхода к обобщенному Санкт-Петербургскому парадоксу. Предложенный подход является альтернативным к традиционному, основанному на функции полезности, он позволяет решить, в частности, обратную задачу: по заданным размерам платежей, силе роста и цене игры находить (неоднозначно) моменты возможных платежей.

Ключевые слова: *Санкт-Петербургский парадокс, дисконтирование, теорема Менгера.*

Классификация JEL: C730.

Санкт-Петербургский парадокс сформулирован Н. Бернулли в начале XVIII в. Его суть в следующем. Петр предлагает Павлу участие в такой игре. Подбрасывается «честная» монета. Если орел выпадает при первом броске, Петр выплачивает Павлу единицу средств (в оригинале речь шла о дукате), если при втором — то 2 единицы, если впервые при n-м броске — то 2^n единиц. Какова «честная» стоимость такой игры, т.е. за сколько дукатов участие в игре должен купить Павел? Естественно считать, что эта стоимость равна ожидаемой денежной сумме (математическому ожиданию), полученной Павлом. Поскольку вероятность события «первое появление орла состоится при n-м подбрасывании» равна $1/2^n$, математическое ожидание выигрыша равно

$$1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+\ldots+2^n\times\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty.$$

Парадоксальность результата привела Г. Крамера (в письме к Н. Бернулли) и Д. Бернулли (Bernoulli, 1738) к введению функции

[1] Авторы благодарны рецензенту за указание на работу (Seidl, 2013).

Журнал НЭА, №2 (38), 2018, с. 48–53

денежной суммы, отражающей ее субъективное восприятие Павлом. Позднее эта функция была названа функцией полезности. В XX в. парадокс привлек внимание многих виднейших исследователей, в числе которых П. Самуэльсон, Р. Ауманн, Л. Шепли (Samuelson, 1977; Aumann, 1977; Shapley, 1977). Функции полезности, предложенные Г. Крамером и Д. Бернулли, растут со скоростью $\sqrt{n}$, $\ln n$ соответственно. Д. Бернулли учел зависимость функции полезности от имеющегося у Павла начального капитала.

Функция полезности финансового актива $f(x)$ должна обладать следующими свойствами:

1) возрастание;

2) вогнутость;

3) $f(0)=0$.

Эти свойства широко известны, и мы их не комментируем. При дополнительном естественном предположении дифференцируемости:

4) $f'(0)=1$.

Свойство 4 является условием нормировки. Естественно полагать, что полезность малых денежных сумм равна самим суммам.

Функции полезности, предложенные Г. Крамером и Д. Бернулли, с некоторыми изменениями имеют вид соответственно $f(x)=2\left(\sqrt{x+1}-1\right)$ и $f(x)=\ln\left(x+1\right)$. Функции модифицированы таким образом, чтобы выполнялись условия 1—4.

«Честная» оценка игры x^* при нулевом капитале Павла (после внесения платы за игру) определяется из уравнения $f\left(x^*\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f\left(2^{n-1}\right)/2^n\right)$. Для приведенных функций ряды в правой части сходятся. Как показывают вычисления, для функции типа Крамера цена игры равна 1,87, для функции типа Бернулли — 1,76.

В то же время, если принять скорость роста платежей более высокой (например, 2^{2^n}), то рассмотренные функции полезности не избавляют от парадоксальности результата. В этом случае целесообразно использовать функцию полезности, которая растет медленнее, в частности, для приведенной скорости роста платежей ее можно принять равной $\ln\left(\ln\left(x+1\right)+1\right)$. Однако можно привести размеры выплат, для которых и эта функция не приведет к разумному результату.

Естественным является вопрос, существуют ли универсальные функции полезности, которые применимы к сколь угодно быстро растущим функциям выплат. П. Самуэльсон именует такую игру суперпетербургской. Этот вопрос рассмотрел К. Менгер (Menger, 1934).

Теорема Менгера. *Игра имеет конечную стоимость при использовании функции полезности $f(x)$ для любой последовательности возможных выплат $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ограниченная.*

Доказательство.

1. Пусть $f(x)\le M$. Тогда для любой последовательности $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ справедливо неравенство $\sum_{n=1}^{\infty}\left(f\left(a_n\right)/2^n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(M/2^n\right)=M$.

Журнал НЭА,
№2 (38), 2018,
с. 48–53

2. Пусть функция полезности $f(x)$ неограниченная. Построим последовательность $a_1,...,a_n,...$ по индукции следующим образом. Примем a_1 таким, что $f(a_1) \geq 2$. Пусть $a_1,...,a_n$ уже построены. Значение a_{n+1} примем таким, что $a_{n+1} > a_n$, $f(a_{n+1}) \geq 2^{n+1}$. В силу неограниченности функции полезности это возможно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(f(a_n)/2^n\right)$ расходится. ■

П. Самуэльсон (Samuelson, 1977) оценивает результат Менгера как главное достижение в теории данного парадокса, полученное после работы Д. Бернулли. В то же время в работе (Peters, 2011) соображения Менгера подвергаются критике, как представляется, не вполне обоснованной. Р. Ауманн (Aumann, 1977) считает допущение неограниченности функции полезности принципиально неприемлемым, приводя весьма остроумный аргумент, опирающийся на стоимость жизни. Следует отметить высокую оценку результата Менгера, данную Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном (Neumann, Morgenstern, 1947).

При использовании функции полезности достаточно произвольным является ее подбор. По существу, функция подбирается под конкретную задачу, а не опирается на те или иные экзогенные соображения. Обычно она связывается с неприятием риска игроками (П. Самуэльсон отмечает, что Петр находится в более рисковой ситуации), но как именно реализуется эта зависимость, далеко не очевидно.

За прошедшее время к парадоксу обращались специалисты в разных областях, иногда неожиданных (например, (Иваницкий, 2010)). Проводились в том числе экспериментальные исследования схожих игр (например, (Cox et al., 2009)). Библиография, посвященная данному парадоксу, весьма обширна (см., например, обзоры (Samuelson, 1977; Seidl, 2013)). Достаточно часто разрешение парадокса видят в невозможности предложенной игры в силу ограниченности ресурсов. В частности, Л. Шепли (Shapley, 1977) и П. Самуэльсон (Samuelson, 1977) считали, что игра невозможна, поскольку Петр не сможет выполнить условия договора. Д. Брито (Brito, 1975) полагал, что есть естественные временные ограничения – продолжительность жизни Павла. Нам представляется, что соображения ограниченности ресурсов, по крайней мере теоретически, преодолимы. В частности, говоря о конечности времени жизни индивида, упускают возможность передачи игры по наследству. Что касается ограниченности ресурсов, то при этом игнорируется противоречие между динамическим характером игры и рассмотрением ресурса в статике – средства Петра со временем могут нарастать. Это соображение высказано в (Durand, 1957; Székely, Richards, 2004). Тем самым потенциально игра может считаться бесконечной. О. Петерс (Peters, 2011) применяет к задаче методы статистической механики, отмечая неэргодичность рассматриваемой системы.

Журнал НЭА, №2 (38), 2018, с. 48–53

В (Seidl, 2013) отмечается, что попытки решения парадокса часто сосредотачивались вокруг преобразований величин платежей или вероятностей. В частности, К. Зейдл пользовался преобразованием вероятностей в духе теории двойственной полезности М. Яри (Yaari,1987). Этот подход, как правило, приводит к тому, что вероятность бесконечной продолжительности игры является положительной.

По нашему мнению, важным фактором, влияние которого не учитывалось в должной мере, является фактор времени, а именно не принимались во внимание временные промежутки между подбрасываниями монеты. О временном факторе с иной точки зрения писал О. Петерс (Peters, 2011). Он отметил, что Д. Бернулли и многие другие авторы исходили из того, что игра проводится мгновенно. Естественно, стоимость игры зависит от того, подбрасывается монета раз в минуту, в час или в месяц. Если использовать ту или иную ставку дисконта (или непрерывный аналог процентной ставки — силу роста δ), то средняя дисконтированная величина потока платежей равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\delta\tau n}\, 2^{n-1}/2^{n}\right)=1/\left\{2\left(1-e^{-\delta\tau}\right)\right\},$$

где τ — интервал между бросками. Естественно полагать (Székely, Richards, 2004), что сила роста характеризует скорость прироста средств Петра. Однако к суперпетербургской игре этот подход неприменим. В то же время небольшая модификация позволяет охватить и этот случай.

Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots$ — величины платежей при окончании игры после 1, ..., n, ... подбрасываний монеты. Допустим, что монета подбрасывается в моменты $t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots$, т.е. подбрасывания монеты допускается производить неравномерно. Примем $t_1=0$, t_{n+1} при $n>0$ определим по индукции: $a_n\, e^{-\delta t_n}=a_{n+1}\, e^{-\delta t_{n+1}}$. Отсюда, $t_{n+1}-t_n=\left(\ln\left(a_{n+1}/a_n\right)\right)/\delta$. Средняя дисконтированная стоимость игры в этом случае равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\, e^{-\delta t_n}/2^{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1/2^{n}\right)=a_1.$$

Разумеется, это не единственный способ построения моментов подбрасываний монеты.

Предложенный подход к разрешению Санкт-Петербургского парадокса и суперпетербургского парадокса, основанный на дисконтировании и управлении моментами подбрасывания монеты, является альтернативой традиционному применению функции полезности. Подобные соображения целесообразно использовать и в других задачах принятия решений в условиях неопределенности, когда есть возможность управления временными характеристиками рассматриваемых процессов.

Журнал НЭА, №2 (38), 2018, с. 48–53

ЛИТЕРАТУРА

Иваницкий Г.Р. (2010). XXI век: что такое жизнь с точки зрения физики // *УФН*. Т. 180. № 4. С. 337–369.

Aumann R.J. (1977). The St. Petersburg Paradox: A Discussion of Some Recent Comments // *Journal of Economic Theory*. Vol. 14 (2). P. 443–445.

Bernoulli D. (1738). Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis // *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanea*. Vol. V. P. 175–192. (Translated and republished as: **Bernoulli D.** (1954). Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk // *Econometrica*. Vol. 22. P. 23–36.)

Brito D.L. (1975). Becker's Theory of the Allocation of Time and the St. Petersburg Paradox // *Journal of Economic Theory*. Vol. 10. P. 123–126.

Cox J.C., Vjollca S., Bodo V. (2009). On the Empirical Relevance of St. Petersburg Lotteries // *Economics Bulletin*. Vol. 29 (1). P. 221–227.

Durand D. (1957). Growth Stocks and the Petersburg Paradox // *The Journal of Finance*. Vol. 12. P. 348–363.

Menger K. (1934). Das unsicherheltsmoment in der wertlehre // *Z. Nationalokon*. Vol. 51. P. 459–485.

Neumann J. von, Morgenstern O. (1947). The Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press. [Русский перевод: **Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.** (1970). Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука.]

Peters O. (2011). The Time Resolution of the St. Petersburg Paradox // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. Vol. 369. P. 4913––4931.

Samuelson P.A. (1977). St. Petersburg Paradoxes: Defanged, Dissected, and Historically Described // *Journal of Economic Literature*. Vol. 15 (1). P. 24–55.

Seidl C. (2013). The St. Petersburg Paradox at 300 // *Journal of Risk and Uncertainty*. Vol. 46. P. 247–264.

Shapley L.S. (1977). The St. Petersburg Paradox: A Con Game? // *Journal of Economic Theory*. Vol. 14 (2). P. 439–-442.

Székely G.J., Richards D. (2004). The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-Tech Stocks in 2000 // *The American Statistician*. Vol. 58 (3). P. 225–231.

Yaari M.E. (1987). The Dual Theory of Choice under Risk // *Econometrica*. Vol. 55. P. 95–115.

Поступила в редакцию 27 июня 2017 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Aumann R.J. (1977). The St. Petersburg Paradox: A Discussion of Some Recent Comments. *Journal of Economic Theory*, 14 (2), 443–445.

Bernoulli D. (1738). Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanea*, V, 175–192. [Translated and republished as: **Bernoulli D.** (1954). Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. *Econometrica*, 22, 23–36.]

Brito D.L. (1975). Becker's Theory of the Allocation of Time and the St. Petersburg Paradox. *Journal of Economic Theory*, 10, 123–126.

Журнал НЭА, №2 (38), 2018, с. 48–53

Cox J.C., Vjollca S., Bodo V. (2009). On the Empirical Relevance of St. Petersburg Lotteries. *Economics Bulletin,* 29 (1), 221–227.

Durand D. (1957). Growth Stocks and the Petersburg Paradox. *The Journal of Finance,* 12, 348–363.

Ivanitskii G.R. (2010). 21st Century: What Is Life from the Perspective of Physics? *Physics-Uspekhi*, 180, 4, 337–369 (in Russian).

Menger K. (1934). Das unsicherheltsmoment in der wertlehre. *Z. Nationalokon*, 51, 459–485.

Neumann J. von, Morgenstern O. (1947). The Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press.

Peters O. (2011). The Time Resolution of the St. Petersburg Paradox. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 369, 4913–4931.

Samuelson P.A. (1977). St. Petersburg Paradoxes: Defanged, Dissected, and Historically Described. *Journal of Economic Literature,* 15 (1), 24–55.

Seidl C. (2013). The St. Petersburg Paradox at 300. *Journal of Risk and Uncertainty*, 46, 247–264.

Shapley L.S. (1977). The St. Petersburg Paradox: A Con Game? *Journal of Economic Theory,* 14 (2), 439–442.

Székely G.J., Richards D. (2004). The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-Tech Stocks in 2000. The American Statistician, 58 (3), 225–231.

Yaari M.E. (1987). The Dual Theory of Choice under Risk. *Econometrica*, 55, 95–115.

Received 27.06.2017

E.M. Bronshtein
Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

O.M. Fatkhiev
Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

A Note on St. Petersburg Paradox

Abstract. St. Petersburg paradox, formulated by N. Bernoulli in the early 18th century, led to defining the utility function (D. Bernoulli, G. Cramer) as a way to resolve the paradox and played an important role in the development of decision making theory. In the 20th century, the paradox attracted the attention of many researchers, including Nobel Prize winners P. Samuelson, R. Aumann, L. Shapley. N. Bernoulli assumed that payments grow exponentially with the coin toss number. The growth rate of payments is higher than the exponential one in the generalized St. Petersburg paradox. The utility functions of Bernoulli and Cramer don't lead to the resolution of the paradox in this case. In 1934, K. Menger showed the necessity and sufficiency of the boundedness of the utility function for resolving of the generalized St. Petersburg paradox. A brief overview of the subject matter is given, as well as the autors' approach to resolving the classical paradox, based on discounting cash flows, in which the time intervals between consecutive coin tossings play a special role. The adaptation of the proposed approach to the generalized St. Petersburg paradox is also described. The proposed approach is an alternative to the traditional based utility function. It allows to solve, in particular, the inverse problem: to find (ambiguous solution) the moments of possible payments according to the set sizes of payments, the force of interest and the price of the game.

Keywords: *St. Petersburg paradox, discounting, Menger theorem.*

JEL Classification: C730.