В.М. Полтерович
ЦЭМИ РАН, Москва

# Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики[1,2]

**Аннотация.** Дается обзор недавних исследований, использующих уравнения математической физики, их аналоги и модификации для описания эндогенной эволюции распределения фирм по уровням эффективности. Предложено мастер-уравнение, содержащее в качестве частных случаев дифференциально-разностные аналоги уравнений Бюргерса, Больцмана и Колмогорова–Петровского–Пискунова; эти аналоги применялись рядом авторов при изучении шумпетерианской динамики. Демонстрируются связи между моделями шумпетерианской динамики и стохастическими дифференциальными уравнениями. Предлагается также схема построения многофакторных моделей эндогенного роста, основанная на сочетании различных правил имитации технологий для разных индикаторов эффективности. Намечены направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** *шумпетерианская динамика, имитация, инновация, уравнение Бюргерса, уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова.*

Классификация JEL: A12, C02, O33, O41.

## 1. Эволюция распределения фирм по уровням эффективности: шумпетерианское мастер-уравнение

Попытки использовать методы теоретической физики для построения новой экономической теории, более глубокой, нежели традиционная теория общего экономического равновесия[3], предпринимались неоднократно и продолжаются до сих пор. Особенно часто авторы обращаются в качестве образца к термодинамике (как классической, так и к статистической), к статистической физике и квантовой механике. Поток работ не иссякает, существуют даже специализированные журналы по эконофизике. Но несмотря на ряд интересных результатов, до самого последнего времени эконофизика оставалась на периферии экономического знания. Прорыв произошел в последние 5—7 лет благодаря тому, что ряд фундаментальных уравнений математической физики оказалось целесообразным использовать для описания научно-технического прогресса в моделях эндогенного экономического роста.

Вслед за Йозефом Шумпетером современные исследователи экономической динамики рассматривают важнейшую компоненту развития – совершенствование технологий — как совокупность двух процессов: создания новых технологий и заимствования (имитации) уже известных. Первый процесс характерен для передовых фирм (хотя и они прибегают к заимствованиям), а второй реализует «преимущество отсталости» по А. Гершенкрону: возможность

---

[1] Работа представляет собой переработанный доклад, прочитанный в феврале 2017 г. на конференции посвященной памяти Г.М. Хенкина. Некоторые изложенные здесь идеи упомянуты в статье о Геннадии Марковиче Хенкине (Берндссон и др., 2017).

Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-02-00524а).

[2] Автор признателен А.В. Леонидову за ценные комментарии. Только автор ответствен за возможные неточности.

[3] Следует, впрочем, подчеркнуть, что понятие равновесия возникло в экономике под влиянием одноименных физических концепций.

Журнал НЭА, №2 (34), 2017, с. 193–201

использовать в производстве результаты, полученные ранее более передовыми предприятиями.

При моделировании шумпетерианской динамики процесс технологического развития в производственной системе на макроуровне описывают как эволюцию распределения предприятий по уровням эффективности. Под эффективностью в данном контексте обычно понимают коэффициент общей факторной производительности, определяемый в результате эконометрического оценивания производственных функций фирм. Недавние расчеты, проведенные на основе данных о более чем 17 тысячах французских фирм за период 1995—2003 гг., показали, что распределение фирм по эффективности обладает замечательными свойствами. Его хвосты близки к распределениям Парето. Распределение движется в направлении роста эффективности с почти постоянной скоростью, причем его форма меняется слабо. Последнее свойство означает, что распределение фирм по эффективности ведет себя как бегущая волна в уравнениях математической физики (König et al., 2016).

Вопрос о том, как именно фирмы принимают решения об усовершенствовании технологий, мало изучен. Предлагаемые разными авторами модели шумпетерианской динамики отличаются предположениями о числе уровней эффективности, которые фирма может преодолеть в единицу времени, и о совокупностях более передовых фирм, которые влияют на ее решения, касающиеся заимствования технологий. Ряд рассмотренных в литературе вариантов являются частными случаями уравнения

$$df_n / dt = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(F_k, f_n, t) f_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi(F_n, f_k, t) f_n, \quad n = 1,2,...; \quad f_0 = 0, \qquad (1)$$

где $f_k = f_k(t)$ — доля фирм, уровень эффективности которых в момент $t$ равен $k$; $\varphi(F_k, f_n, t)$ — доля фирм уровня $k$, переходящих в момент $t$ на уровень $n$ в единицу времени. Зависимость функции $\varphi$ от первого аргумента может, в частности, отражать гипотезу о том, что скорость перехода возрастает с увеличением доли $1 - F_k$ более эффективных фирм.

Уравнение (1) отражает баланс притока фирм на уровень $n$ и их оттока с этого уровня. Если величины $\varphi(F_k, f_n, t)$ зависят только от номеров $k$, $n$, то (1) совпадает с частным случаем хорошо изученного в физике основного кинетического уравнения. Очевидно, процесс, описываемый уравнением (1), обладает марковским свойством: каждое последующее состояние системы зависит только от предыдущего.

Оказывается, что частными случаями (1) являются дифференциально-разностные аналоги знаменитых уравнений математической физики, включая уравнения Бюргерса, Колмогорова—Петровского—Пискунова и Больцмана.

Другой подход, также позволяющий установить связи между моделями шумпетерианской динамики и уравнениями математической физики, исходит из предположений о том, что эволюция эффективности фирм описывается тем или иным стохастическим дифференциальным уравнением. Ниже мы покажем, как эти два подхода приводят к рассмотрению знаменитых уравнений или их аналогов.

Журнал НЭА, №2 (34), 2017, с. 193–201

## 2. Частные случаи мастер-уравнения

**2.1.** Уравнения типа Бюргерса

Пусть переход возможен только на один шаг и фирмы ориентируются на суммарную долю впереди идущих: $\varphi(F_k, f_n, t) = 0, \quad k \neq n-1; \quad \varphi(F_{n-1}, f_n, t) = \varphi(F_{n-1})$. Тогда из (1) получаем

$$df_n / dt = \varphi(F_{n-1}) f_{n-1} - \varphi(F_n) f_n \ , \quad f_0 = 0, \tag{2}$$

что после суммирования дает

$$dF_n / dt = \varphi(F_n)\ (F_{n-1} - F_n\ ). \tag{3}$$

Здесь $F_n$ – доля фирм с уровнем эффективности, не превосходящим $n$.

По-видимому, аналогия между технологическим развитием и волновыми процессами в сплошных средах была впервые продемонстрирована в статье (Полтерович, Хенкин, 1988), где для описания шумпетерианской динамики было предложено уравнение (3). Основные результаты цитируемой статьи относились к специальному случаю:

$$\varphi(F_n) = \alpha + \beta(1 - F_n). \tag{4}$$

Легко убедиться, что уравнения (3), (4) согласуются с предположением о том, что фирмы из числа $f_n = F_n - F_{n-1}$ переходят с уровня $n$ на уровень $n$+1 со скоростью $\alpha f_n$ в результате инновационного процесса и со скоростью $\beta(1 - F_n) f_n$ в результате имитации. Таким образом, имитация происходит тем быстрее, чем большее число фирм освоили более эффективные технологии. Уравнения (3), (4) при естественных начальных условиях допускают явное решение, которое, как было показано в (Полтерович, Хенкин, 1988), сходится к волне. В данном случае она представляет собой логистическое распределение, движущееся с постоянной скоростью. В этой же работе было указано, что сходимость к волне (более общего вида) имеет место и для уравнения (3) с положительной, непрерывной монотонно убывающей функцией φ, и что данное уравнение является аналогом уравнения Бюргерса:

$$\partial F / \partial t + \varphi(F)(\partial F / \partial x) = \mu(\partial^2 F / \partial x^2),\ \mu > 0, \tag{5}$$

где $F(x,t)$ – распределение фирм по эффективности x.

Уравнение (3) и его модификации исследовались в работах Г. Хенкина, В. Полтеровича, А. Шананина, В. Беленького, А. Гасникова, Я. Ташлицкой и др. Соответствующие ссылки можно найти в статье (Henkin, 2012). В этой работе Г. Хенкин представил наиболее общие результаты исследования уравнения (3), включая случай немонотонной φ. В случае немонотонной φ уравнение (3) допускает существование многих волн, движущихся с разными постоянными скоростями. Между ними образуются участки диффузии. К этой системе волн сходится решение с достаточно произвольными начальными условиями. Отыскание асимптотической оценки для границы между волной и диффузией оказалось трудной задачей. В работе (Henkin, 2012) дано ее наиболее полное решение. Одновременно аналогичная задача была решена Г. Хенкиным и для уравнения Бюргерса (5).

Заслуживает упоминания модификация модели (3), (4), предложенная в (Полтерович, Хенкин, 1988) и учитывающая возможность деградации фирм –

Журнал НЭА, №2 (34), 2017, с. 193–201

перехода с уровня $n$+1 на уровень $n$ в результате износа мощностей. Этот вариант модели неплохо аппроксимировал реальные данные, описывавшие эволюцию распределения предприятий черной металлургии по уровням рентабельности (это альтернативный показатель эффективности) в 1976—1982 гг. (Гельман и др., 1993). Недавно была доказана глобальная асимптотическая устойчивость волнового решения для этого варианта модели; скорость волны в данном случае может быть как положительной, так и отрицательной (Александрова, 2015).

В работе (Hongler et al., 2016) авторы постулируют стохастический механизм эволюции эффективности фирм, приводящий к уравнению Бюргерса. А именно рассматривается совокупность групп взаимодействующих фирм с эффективностью $x_k(t)$, $k=1,\ldots,K$; $x_{k+1}(0)>x_k(0)$. Предполагается, что скорость изменения $x_k(t)$ является суммой трех компонент, зависящих от детерминированных инноваций (параметр α), случайных инноваций (броуновское движение с параметром σ) и от доли более эффективных фирм (параметр β). Устремляя $K$ к бесконечности, авторы получают уравнение (5) с $\varphi(F)=\alpha+\beta(1-F)$, $\mu=0{,}5\sigma^2$.

**2.2.** Уравнения типа Колмогорова—Петровского—Пискунова

Пусть теперь в единицу времени доля $\beta f_n$ из числа фирм уровня $k<n$ переходит на уровень $n$ благодаря встречам с фирмами $f_n$ и заимствованию их технологии, а доля α фирм $f_{n-1}$ попадает на уровень $n$ в результате инноваций:

$$\varphi(F_k,f_n,t)=\beta f_n,\quad k<n-1,\quad \varphi(F_k,f_n,t)=0,\quad k\geq n,\quad \varphi(F_{n-1},f_n,t)=\alpha+\beta f_n.$$

Очевидно, что (см. (1)):

$$df_n\,/\,dt=-\alpha f_n+\alpha f_{n-1}-\beta(1-F_n)f_n+\beta F_{n-1}f_n,$$

$$dF_n\,/\,dt=-\alpha(F_n-F_{n-1})-\beta(1-F_n)F_n. \tag{6}$$

Уравнение (6) – дифференциально-разностный аналог уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова. В качестве возможной модели шумпетерианской динамики оно было предложено в (Полтерович, Хенкин, 1988) и исследовано в (König et al., 2016).

В (Luttmer, 2012) постулируется, что логарифм эффективности $x_t$ каждой фирмы эволюционирует согласно уравнению

$$dx_t=\alpha dt+\sigma dW_t+\Delta_t dN_t, \tag{7}$$

где α характеризует детерминированные инновации, $W_t$ — стандартное броуновское движение, описывающее случайные инновации, $N_t$ — пуассоновский процесс с параметром β, описывающий возможность заимствования. Когда появляется такая возможность, фирма случайно выбирает партнера и заимствует у него технологию, если та оказывается более эффективной. В результате эффективность возрастает на величину $\Delta_t\geq 0$. Если число фирм велико, то, как показано в (Luttmer, 2012), соотношение (7) порождает уравнение Колмогорова—Петровского—Пискунова:

$$\partial F\,/\,\partial t=-a\partial F\,/\,\partial x+0{,}5\sigma^2(\partial^2F\,/\,\partial x^2)-\beta F(1-F),$$

где $F$ — распределение логарифма эффективности $x$ в момент $t$ (заметим, что производную $\partial F/\partial x$ можно исключить подходящей подстановкой).

Журнал НЭА, №2 (34), 2017, с. 193–201

**2.3.** Уравнения типа Больцмана

Еще один важный частный случай уравнения (1) возникает, если предположить, что в единицу времени доля $\psi_k(\mathrm{t})f_n$ фирм из числа $f_k$, $k < n$, зависящая от времени, переходит на уровень $n$ благодаря встречам с фирмами из $f_n$. Предполагается, что встречи стимулируют и инновации, и заимствования:

$$\varphi\ (F_k, f_n, t) = \psi_k(t) f_n\ ,\quad k < n,\quad \varphi(F_k, f_n, t) = 0,\quad k \ge n,$$

$$df_n / dt = f_n \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k(t) f_k - \psi_n(t) f_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k. \tag{8}$$

Это дифференциально-разностный аналог уравнения Больцмана. Коэффициенты $\psi_k$ увеличиваются со временем, отражая тем самым рост экономики и вложений в технический прогресс. Уравнение Больцмана использовано для описания шумпетерианской динамики в статье (Lucas, Moll, 2014)[4].

**3. Уравнения математической физики в моделях эндогенного экономического роста**

В ряде работ (см., в частности, (Acemoglu, Cao, 2015; König et al., 2016; Lucas, Moll, 2014; Luttmer, 2012)) предложены равновесные модели экономического роста, учитывающие процессы принятия агентами решений о потреблении товаров, где эволюция эффективности (продуктивности) фирм порождается тем или иным механизмом шумпетерианской динамики. На равновесных траекториях распределение фирм по эффективности или по величине (доле работников) сходится к бегущей волне с Парето-хвостами. Приведем формулировку одной из таких моделей.

**3.1.** Модель Лукаса—Молла

В работе (Lucas, Moll, 2014) рассмотрена динамическая модель оптимального планирования:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\theta t}\ \left(\int_0^{\infty}\left(\left[1 - s(x,t)\right] x\, f(x,t)\, dx\right) dt \ \to \max_{s(x,t)}, \tag{9}$$

$$\partial f / \partial t = -\mu(s(x,t)) f(x,t) \int_x^{\infty} f(y,t)\, dy + f(x,t) \int_0^x \mu\left(s(y,t)\right) f(y,t)\, dy \tag{10}$$

при заданном распределении $f(x, 0)$. Здесь $f(x,t)$ – доля фирм с эффективностью $x$ в момент времени $t$. Общее число фирм без ограничения общности нормировано к 1. Производственная функция предполагается линейно зависящей от количества труда, которое считается фиксированным, а коэффициент пропорциональности равным общей факторной производительности $x$. Соответственно, выпуск на одного работника фирмы с эффективностью $x$ совпадает с $x$, а выпуск всех таких фирм в момент $t$ равен $xf(x, t)$. Доля $s(x, t)$ этого выпуска затрачивается на переход части $\mu(s(x, t))$ фирм с уровня $x$ на более высокие уровни, а остальное идет на потребление. Таким образом, функционал (9) представляет собой совокупное дисконтированное потребление на бесконечном временном интервале; $\theta$ – норма дисконта. Рост эффективности фирм описывается обобщенным уравнением Больцмана с коэффициентом $\mu$, определяющим скорость роста, зависящим от управления $s(x, t)$.

[4] Я. Ташлицкая и А. Шананин рассмотрели еще один интересный частный случай уравнения (1), предположив, что скорость перехода фирм с уровня $n$ на уровень $n+1$ пропорциональна доле фирм уровня $n+1$. После подходящей подстановки они получили цепочку Ленгмюра – дифференциально-разностный аналог уравнения Кортевега–де Фриза (см. ссылки и обсуждение в (Хенкин, Шананин, 2014)).

Журнал НЭА, №2 (34), 2017, с. 193–201

В статье (Lucas, Moll, 2014) показано, что описанная модель допускает стационарную траекторию экономического роста. Авторы строят соответствующую децентрализованную модель и демонстрируют, что в ней централизованный (максимальный) темп роста не достижим, поскольку фирмы, выбирая каждая свое управление $s(x,t)$, не координируют свои действия друг с другом.

**3.2.** Шумпетерианская модель эндогенного роста с капиталом

В модели Лукаса—Молла, как и в других известных автору моделях рассматриваемого типа, накопление физического объема капитала не происходит, растет лишь его производительность. Ниже предлагается модель, лишенная этого недостатка. Она основана на соединении идей Лукаса—Молла и модели (Henkin, Polterovich, 1991) с несколькими показателями эффективности.

Пусть каждая фирма характеризуется двумя показателями эффективности. В качестве первого выступает общая факторная производительность (ОФП) $m$, а в качестве второго – объем капитала на одного работника (капиталовооруженность) $n$. В соответствии с (Lucas, Moll, 2014) скорости движения по горизонтали и вертикали двумерной сетки зависят от управлений. Для простоты число работников предполагается постоянным и равным числу потребителей. Предлагаемая централизованная модель шумпетерианской динамики с капиталом имеет вид:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta} u\left(c(t)\right)dt \to \max, \tag{11}$$

$$c(t)+dk(t)/dt = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_{mn}(t)-s_{mn}^{(1)}(t)\right)f_{mn}(t), \tag{12}$$

$$\frac{dF_{mn}}{dt}=\varphi_1\left(F_m^{(1)},s_{mn}^{(1)}\right)\left(F_{(m-1)n}-F_{mn}\right)+\varphi_2\left(F_n^{(2)},s_{mn}^{(2)}\right)\left(F_{m(n-1)}-F_{mn}\right), \tag{13}$$

$$F_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij},\quad F_m^{(1)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}f_{ij},\quad F_n^{(2)}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}. \tag{14}$$

Здесь $c(t)$ — потребление репрезентативного потребителя с функцией полезности $u$ и нормой дисконта θ; $f_{mn}=f_{mn}(t)$ — доля фирм на уровне ОФП $m$ с капиталовооруженностью $n$ в момент $t$; $F_{mn}$ — соответствующая кумулятивная функция распределения; $F_m^{(1)}$, $F_n^{(2)}$ — маргинальные распределения функции $F_{mn}$. По аналогии с одномерным случаем предполагается, что из каждого узла двумерной решетки фирма может перейти в один из двух соседних узлов с более высоким значением одного из индикаторов. Функции $\varphi_1\left(F_m^{(1)},s_{mn}^{(1)}\right),\varphi_2\left(F_n^{(2)},s_{mn}^{(2)}\right)$ задают доли фирм $f_{mn}$, увеличивающих в единицу времени значение, соответственно, ОФП и фондовооруженности. В простейшем случае эти функции убывают по первым аргументам, воплощая тем самым естественную идею: чем больше доля более эффективных фирм, тем с большей вероятностью фирма перейдет на более высокий уровень. $s_{mn}^{(1)}=s_{mn}^{(1)}(t)$ — подлежащий выбору объем ресурса, затрачиваемого на переход одной фирмы за единицу времени с уровня эффективности $m$ на уровень $m$+1; $s_{mn}^{(2)}=s_{mn}^{(2)}(t)$ – управление, регулирующее переход с уровня капиталовооруженности $n$ на уровень $n$+1; $g_{mn}$ – выпуск фирмы на уровне эффективности $m$ с капиталовооруженностью $n$. Число фирм постоянно и условно принято за единицу.

Журнал НЭА, №2 (34), 2017, с. 193–201

Каждая фирма нанимает одного работника. Объем капитала $k$ определяется соотношением

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n f_{mn} = k, \tag{15}$$

уравнение баланса капиталовложений имеет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2\left(F_n^{(2)}, s_{mn}^{(2)}\right) f_{mn} = dk / dt. \tag{16}$$

Нетрудно показать, что из (13) и (15) следует (16).

К настоящему времени модель (11)–(16) не исследована. Она приведена как дополнительная демонстрация того, что уравнения математической физики, их дифференциально-разностные аналоги и модификации естественно вписываются в общие модели экономической динамики, позволяя учесть взаимодействие инновационной и имитационной составляющей в процессах эндогенного экономического роста.

Очевидно, частные случаи шумпетерианского мастер-уравнения отнюдь не исчерпываются рассмотренными выше вариантами. Для моделей с капиталом возможно сочетание разных правил движения вдоль осей. В (13) каждое слагаемое задает правило, приводящее в одномерном случае к аналогу уравнения Бюргерса (3). Однако нет оснований предполагать, что оба слагаемых должны принадлежать одному типу. Например, первое из них могло бы совпадать с правой частью (8) – аналога уравнения Больцмана. При добавлении других факторов, в частности человеческого капитала, увеличивается размерность функции распределения и, соответственно, расширяется набор правдоподобных моделей, генерируемых по предлагаемой схеме. Было бы важно выяснить, как именно ведут себя фирмы при тех или иных обстоятельствах, заимствуя технологии, совершенствуя используемый труд и наращивая капитал. Следует также учесть, что передовые фирмы могут заимствовать технологии иностранных предприятий, а слабые – поддерживаться государством для обеспечения занятости. Эти соображения, видимо, позволят оправдать предположения работы (Хенкин, Шананин, 2014), приводящие к расщеплению технологических укладов. Однако для проверки гипотез о технологических укладах важно располагать статистическими данными о распределении фирм по уровням эффективности в догоняющих экономиках.

В общих моделях шумпетерианской динамики необходимо учитывать процессы входа фирм на рынок и выхода отстающих (Acemoglu, Cao, 2015).

Целесообразно рассмотреть возможность применения описываемого подхода к исследованию эволюции распределения стран по уровням эффективности – проблеме, которой посвящено значительное число работ. Однако уже имеющиеся результаты позволяют констатировать, что союз экономической теории и математической физики состоялся.

ЛИТЕРАТУРА

**Александрова А.Ю.** (2015). Исследование скорости бегущей волны в одной модификации модели Полтеровича–Хенкина. В сб.: «*Труды МФТИ*». Т. 7. № 4. С. 11–16.

**Берндссон Б., Кисляков С.В., Новиков Р.Г., Полтерович В.М., Поляков П.Л., Туманов А.Е., Шананин А.А., Эпштейн Ч.Л.** (2017). Геннадий Маркович Хенкин (1942–2016) // *Успехи математических наук* (в печати).

**Гельман Л.М., Левин М.И., Полтерович В.М., Спивак В.А.** (1993). Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) // *Экономика и математические методы.* Т. 29. Вып. 3. С. 460–469.

**Полтерович В.М., Хенкин Г.М.** (1988). Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // *Экономика и математические методы.* Т. 24. Вып. 6. С. 1071–1083.

**Хенкин Г.М., Шананин А.А.** (2014). Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // *Математическое моделирование.* Т. 26. Вып. 8. С. 3–19.

**Acemoglu D., Cao D.** (2015). Innovation by Entrants and Incumbents // *Journal of Economic Theory.* Vol. 157. P. 255–294.

**Henkin G.M.** (2012). Burgers Type Equations, Gelfand's Problem and Schumpeterian Dynamics // *Journal of Fixed Point Theory and Applications.* Vol. 11. Issue 2. P. 199–223.

**Henkin G.M., Polterovich V.M.** (1991). Schumpeterian Dynamics as a Non-linear Wave Theory // *Journal of Mathematical Economics.* Vol. 20. No. 6. P. 551–590.

**Hongler M.-O., Gallay O., Hashemi F.** (2016). Impact of Imitation on the Dynamics of Long Wave Growth. Working paper. July 27, ResearchGate.

**König M.D., Lorenz J., Zilibotti F.** (2016). Innovation vs. Imitation and the Evolution of Productivity Distributions // *Theoretical Economics.* Vol. 11. P. 1053–1102.

**Lucas Jr.R.E., Moll B.** (2014). Knowledge Growth and the Allocation of Time // *Journal of Political Economy.* Vol. 122. No. 1. P. 1–51.

**Luttmer E.G.J.** (2012). Eventually, Noise and Imitation Implies Balanced Growth. Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 699. August.

*Поступила в редакцию 6 апреля 2017 года*

REFERENCES (with English translations or transliteration)

**Acemoglu D., Cao D.** (2015). Innovation by Entrants and Incumbents. *Journal of Economic Theory*, 157, 255–294.

**Aleksandrova A.Y.** (2015). Running Wave Speed Analysis in one Polterovich–Henkin Model Modification. Proceedings of MIPT, 7, 4, 11–16 (in Russian).

**Berndsson B., Kislyakov S.V., Novikov R.G., Polterovich V.M., Polyakov P.L., Tumanov A.E., Shananin A.A., Epstein Ch.L.** (2017). Gennadii Markovich Henkin (1942–2016). *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* (in print; in Russian).

**Gelman L.M., Levin M.I., Polterovich V.M., Spivak V.A.** (1993). Modeling of the Dynamics of Firms Distribution in Accordance with Efficiency Levels (Ferrous Metal Industry Case). *Economics and Mathematical Methods*, 29, 3, 460–469 (in Russian).

**Henkin G.M.** (2012). Burgers Type Equations, Gelfand's Problem and Schumpeterian Dynamics. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 11, 2, 199–223.

**Henkin G.M., Polterovich V.M.** (1991). Schumpeterian Dynamics as a Non-linear Wave Theory. *Journal of Mathematical Economics*, 20, 6, 551–590.

**Henkin G.M., Shananin A.A.** (2014). Mathematical Modeling of the Schumpeterian Dynamics of Innovation. *Matemetical Modeling*, 26, 8, 3–19 (in Russian).

**Hongler M.-O., Gallay O., Hashemi F.** (2016). Impact of Imitation on the Dynamics of Long Wave Growth. Working paper. July 27, ResearchGate.

**König M.D., Lorenz J., Zilibotti F.** (2016). Innovation vs. Imitation and the Evolution of Productivity Distributions. *Theoretical Economics*, 11, 1053–1102.

**Lucas Jr.R.E., Moll B.** (2014). Knowledge Growth and the Allocation of Time. *Journal of Political Economy*, 122, 1, 1-51.

**Luttmer E.G.J.** (2012). Eventually, Noise and Imitation Implies Balanced Growth. Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 699. August.

**Polterovich V., Henkin G.** (1988). An Evolutionary Model with Interaction between Development and Adoption of New Technologies. *Economics and Mathematical Methods*, 24, 6, 1071–1083 (in Russian).

*Received 6.04.2017*

V.M. Polterovich
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

## The Theory of Endogenous Economic Growth and Equations of Mathematical Physics

**Abstract.** The paper contains an overview of recent studies that use equations of mathematical physics, their analogs and modifications for describing endogenous evolution of firms' distribution by efficiency levels. The master equation is proposed that includes, as special cases, differential-difference analogues of the Burgers, Boltzmann, and Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equations. The analogues were applied by a number of authors in the study of Schumpeterian dynamics. The connections between the models of Schumpeterian dynamics and stochastic differential equations are demonstrated. A scheme for constructing multifactorial models of endogenous growth is also proposed, based on a combination of different imitation rules for different performance indicators. Directions for further research are outlined.

**Keywords:** *Schumpeterian dynamics, imitation, innovation, Burgers equation, Boltzmann equation, Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation.*

JEL Classification: A12, C02, O33, O41.