Рабинович Борис Евгеньевич
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Новосибирск

Равновесия в экономике обмена с внешним влиянием на доход

Классический (или, точнее неоклассический) подход к построению математических моделей экономического равновесия, восходящий к Вальрасу, предполагает абсолютную автономность атомарных экономических субъектов, взаимодействующих в “пустом” пространств на основе принципов рационального поведения. В частности, это подразумевает формирование доходной части бюджета экономического агента происходит исключительно за счет внутренних ресурсов, находящихся в его полной и неотъемлемой собственности. Кроме того, структура расходов на потребление формируется на основе отношений предпочтения, считающихся полностью автономными, т.е. никак не учитывающих объем и структуру потребления других агентов. Эти предположения можно назвать гипотезой об отсутствии внешних влияний (или “экстерналий”). В известной степени этот подход к моделированию экономических систем аналогичен ньютоновской механике “материальных точек” в вакууме. Разумеется, предположение о рационально-автономном поведении экономических агентов не лишено реальных оснований, и экономические модели, базирующиеся на нем, часто дают вполне адекватное описание реальных экономических процессов. Тем не менее, абсолютизация тезиса об автономности искажает реальную картину экономической жизни, равно как и ньютоновская механика физическую картину мира.

Степень значимости внешних влияний на предпочтения агентов в реальной экономике, возможно, является спорным вопросом (в конце концов, точная информация об объемах и структуре “чужого” потребления редко бывает доступна рядовому потребителю, скорее, здесь большее влияние будут оказывать домыслы и предрассудки). Однако, что касается неавтономности формирования дохода, сомневаться в значимости этого явления в реальной экономической деятельности не приходится. Прогрессивное налогообложение наряду с системой различных дотаций, компенсаций и трансфертов на всех уровнях формирования доходов, порождает многочисленные связи между доходами различных субъектов, от семейного бюджета физических лиц до бюджетов территориальных образований.

Модель экономики обмена с внешним влиянием на доход

В настоящей работе исследуется некоторая экономическая модель, аналогичная классической модели чистого обмена, за исключением неавтономного механизма формирования потребительск дохода. Величина этого дохода будет зависеть не только от текущих цен, собственных ресурсов и государственной политики, но и от действий других экономических агентов. Будем отождествлять экономического агента с некоторой территориальной единицей, обладающей достаточно широкой степенью самостоятельности. В дальнейшем этот агент будет называться “регионом” . Каждый регион i $(i = \overline{1,\, n})$ обладает некоторым начальным запасом товаров $\omega^i \in \mathbb{R}^l_+$, которыми он может распоряжаться по своему усмотрению. В частности, он может продать любую его часть $y^i \leq \omega^i$ по рыночным ценам $p \in \mathbb{R}^l_{++}$. Однако соответствующая выручка $p{\cdot}y^i$, в отличие от классической модели, не поступает полностью в распоряжение региона i , а перераспределяется по некоторой схеме через государственный бюджет.

В итоге региону i достается некоторая сумма $W^i(p, y^1, \ldots, y^n)$, зависящая, в том числе, от объемов продаж, со стороны всех остальных регионов. В работе будет исследоваться простейшая схема перераспределения с фиксированными весами, хотя модель допускает и другие, более сложные схемы. В рамках полученного дохода регион i формирует свой потребительский план на основе своей функции полезности (или, более общо, отношения предпочтения), в которой на этот раз учитывается стремление “придержать” часть своих ресурсов $z^i = \omega^i - y^i$, не связанное напрямую с их потребительской ценностью для региона i. Это стремление, в данной ситуации в разумных пределах вполне оправданным, ввиду реальной опасности оказаться безвозмездным донором большого количества любителей “прокатиться за чужой счет”.

В настоящей работе предполагается, что все функции полезности являются логарифмированн функциями Кобба-Дугласа. Формализуя вышесказанное, получаем задачу потребителя в терминах потребления-остатков от продаж:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^i(x^i, z^i) = \sum\limits_{j\in L} \alpha^i_j \ln x^i_j + \sum\limits_{j\in L} \beta^i_j \ln z^i_j \to \max\limits_{(x^i,z^i)\in B^i(p,z^{-i})} \\ B^i(p, z^{-i}) = \{(x^i, z^i) :\ x^i \geq 0, z^i \geq 0, \mu^i p \cdot \sum\limits_{k\in N} (\omega^k - z^k) \geq p x^i\}. \end{array} \right. \tag{1}$$

где

$$\forall i \in N, \forall j \in L : \quad \alpha^i_j, \beta^i_j, \mu^i \in (0, 1), \quad \sum_{j\in L} (\alpha^i_j + \beta^i_j) = \sum_{i\in N} \mu^i = 1,\ z^{-i} = \big(z^k\big)_{k\in N\setminus\{i\}}$$

Существование и единственность равновесия

Задача (**??**) является задачей выпуклого программирования. Для нее применим известный критерий оптимальности, используя который получаем единственное решение:

$$\overline{x^i_j}(p, z^{-i}) = \frac{\mu^i\alpha^i_j}{p_j} p \cdot (\omega - [z]^{-i}), \quad \overline{z^i_j}(p, z^{-i}) = \frac{\beta^i_j}{p_j} p \cdot (\omega - [z]^{-i}), \tag{2}$$

где

$$[z]^{-i} = \sum_{k\in N\setminus\{i\}} z^k, \omega = \sum_{i\in N} \omega^i.$$

Решение $(\overline{x^i}, \overline{z^i})$ задачи (**??**) называется **оптимальным откликом** агента i на внешние параметры (p, z^{-i}).

Система оптимальных откликов $(\overline{x^i}, \overline{z^i})_{i\in N} \in \mathbb{R}^{2nl}_+$ называется **согласованной**, если для каждого агента i вектор $(\overline{x^i}, \overline{z^i}\ )$ является оптимальным откликом на $(p, \overline{z^{-i}})$.

Совокупным спросом при ценах $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ в модели экономики обмена с внешним влиянием на доход называется набор согласованных оптимальных откликов $(\overline{x^i}(p), \overline{z^i}(p))_{i\in N}$. Множество всех векторов совокупного спроса будем обозначать через $D^N(p)$.

Вектор цен $p^* \in \mathbb{R}^l_{++}$ называется **равновесным**, если существует вектор совокупного спроса $(\overline{x}, \overline{z}) \in D^N(p^*)$, удовлетворяющий условию товарного баланса $\sum\limits_{i\in N} (\overline{x^i} + \overline{z^i}) = \sum\limits_{i\in N} \omega^i$. Вектор $(\overline{x}, \overline{z})$ в этом случае будем называть **равновесным распределение**

Согласование оптимальных откликов, совокупный спрос

Соотношения (**??**), образуют систему из $2nl$ линейных уравнений с таким же числом неизвестных (x^i_j, z^i_j), $i \in N$, $j \in L$. Положим $\omega = \sum\limits_{i\in N} \omega^i$, $\beta^i = \sum\limits_{j\in L} \beta^i_j$, $M = 1 + \sum\limits_{i\in N} \dfrac{\beta^i}{1 - \beta^i}$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1 *Существует единственное решение системы (**??**), образующее набор согласованны оптимальных откликов, т.е. совокупный спрос. Оно выражающееся формулами:*

$$\overline{z^i_j}(p) = \frac{\beta^i_j}{M(1-\beta^i)} \cdot \frac{p\cdot\omega}{p_j}, \quad \overline{x^i_j}(p) = \frac{\alpha^i_j\cdot\mu^i}{M(1-\beta^i)} \cdot \frac{p\cdot\omega}{p_j}, \quad j\in L.$$

Существование и единственность равновесия

Теорема 2 *Существует вектор $p=(p_1,\dots,p_l)$ такой, что для каждого $j\in L$ имеет место соотношение материального баланса для совокупного спроса:*

$$\sum_{i\in N}\overline{x^i_j}(p) + \sum_{i\in N}\overline{z^i_j}(p) = \omega_j, .$$

Кроме того, всякий вектор p , удовлетворяющий этому условию, положительно пропорционален вектору

$$\left(\frac{B_1}{\omega_1},\dots,\frac{B_l}{\omega_l}\right), \quad \textit{где } B_j = \sum_{i\in N}\frac{\beta^i_j+\alpha^i_j\cdot\mu^i}{(1-\beta^i)}.$$

Доказательства обеих теорем основаны на сводимости проблемы к решению квадратных систем линейных уравнений и исследованию ранга матрицы коэффициентов.

Пример отсутствия слабой парето–оптимальности в равновесии

Теорема 1 и **Теорема 2** обеспечивают существование и единственность равновесного распределения. В классической модели экономики чистого обмена (как, впрочем и в более общей модели Эрроу–Дебре) справедлив результат, обычно называемый «Первой теоремой благосостояния», заключающийся в том, что всякое равновесное распределение слабо оптимально по Парето. Более того, при наличии некоторых дополнительных условий на функции полезности (функции Кобба–Дугласа обеспечивают их с большим запасом) удается доказать сильную парето–оптимальность равновесных распределений. Логичной представляется постановка вопроса о парето–оптимальности равновесных распределений в изучаемой модели, которая отличается от классической модели чистого обмена лишь неавтономным механизмом формирования дохода. Однако, следующий контр-пример демонстрирует отсутствие даже слабой оптимальность по Парето.

Пусть совокупный начальный запас каждого товара равен 1 и все экономические агенты полностью идентичны, т.е.

$$\forall i\in N \quad \forall j\in L: \quad \omega^i_j = \frac{1}{n}, \quad \mu^i = \frac{1}{n}, \quad \alpha^i_j = \beta^i_j = \frac{1}{2l}.$$

В этом случае в равновесном состоянии каждый агент извлекает полезность:

$$u^i(\overline{x^i}(\overline{p}), \overline{z^i}(\overline{p})) = \ln\frac{1}{(n+1)n^{\frac{1}{2}}}.$$

С другой стороны, рассмотрим равномерное распределение всех товаров между всеми агентами в равных долях между потреблением и запасами, т.е. $x^i_j = z^j_j = \dfrac{1}{2n}$. Тогда извлекаемая полезность равна

$$u^i(x^i,z^i) = \sum_{j\in L}\alpha^i_j\ln x^i_j + \sum_{j\in L}\beta^i_j\ln z^i_j = \ln\frac{1}{2n}.$$

Очевидно, что при $n \geq 2$ справедливо строгое неравенство $(n+1)\sqrt{n} > 2n$, следовательно

$$\forall i \in N \quad \forall j \in L: \quad u^i(x^i, z^i) > u^i(\overline{x^i}(\overline{p}), \overline{z^i}(\overline{p})).$$

Построенный пример иллюстрирует чисто отрицательное влияние механизма трансфертов на эффективность распределения в утилитаристском смысле. Однако, справедливости ради следует отметить, что на практике использование трансфертов всегда направлено на решение определенных социальных задач, а отнюдь не на достижение утилитарной эффективности. Поэтому, окончательный вердикт по поводу пользы или вреда применения трансфертов должен основываться на сопоставлении последствий их использования, отрицательных утилитарных, отмеченных выше, и положительных социальных, которые, ввиду сложности и неоднозначности, остались за рамками нашей упрощенной модели.

Устойчивость процедуры нащупывания по Курно

Рассмотрим итерационный процесс, который называется процедурой нащупывания по Курно:

Пусть в момент времени 0 агент i формирует план $(x^i, z^i)_0$, $i = \overline{1, n}$. Предположим, что в момент времени t план $(x^i, z^i)_t$, $t \geq 0$ агента i сформирован. Тогда план $(x^i, z^i)_{t+1}$ формируется как оптимальный отклик агента i на (p, z_t^{-i}) .

Введем следующие обозначения:

$\beta^i = \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j^i$ - «суммарная скупость» агента i.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \beta^1 & \cdots & \beta^1 \\ \beta^2 & 0 & \cdots & \beta^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^n & \beta^n & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— матрица «скупости».}$$

Пусть $(\overline{x}(p), \overline{z}(p)) = (\overline{x^i}(p), \overline{z^i}(p))_{i \in N}$ — вектор совокупного спроса при ценах p. Будем говорить, что этот ***совокупный спрос устойчив по Курно***, если при любых начальных данных $(z^i)_0, \; i \in N$ процедура нащупывания по Курно сходится к $(\overline{x}(p), \overline{z}(p))$.

Теорема 3 *Совокупный спрос $(\overline{x}(p), \overline{z}(p))$ устойчив по Курно в том и только в том случае, когда $\rho(G) < 1$.При $\rho(G) = 1$, процесс Курно расходится для почти всех начальных положений. В случае $\rho(G) > 1$ процесс всегда расходится если начальное положений отлично от $(\overline{x}(p), \overline{z}(p)) = (\overline{x^i}(p), \overline{z^i}(p))_{i \in N}$.*

Замечание 1 *Для спектрального радиуса матрицы G справедлива оценка:*

$$(n-1)\min_{i\in N}\beta^i \le \rho(G) \le (n-1)\max_{i\in N}\beta^i.$$

Руководствуясь этой оценкой, получаем, что при $n = 2$ устойчивость всегда имеет место.

Вальрасовский процесс нащупывания равновесных цен

Избыточным спросом при ценах $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ называется вектор $X(p) = (X_1(p), \dots, X_l(p))$ такой, что:

$$\forall j \in L: \quad X_j(p) = \sum_{i\in N}\overline{x^i_j}(p) + \sum_{i\in N}\overline{z^i_j}(p) - \omega_j.$$

Определим дискретный вальрасовский процесс нащупывания равновесных цен следующим образом. Пусть в момент времени $t = 0$ цены установлены на уровне $p^0 = (p^0_1, \dots, p^0_l)$. Поскольку функция спроса однородна степени нуль, то без ограничения общности можно полагать $p^0_l = \dfrac{B_l}{\omega_l}$. Предположим теперь, что к моменту времени t уже определены цены p^t, и соответствующий совокупный спрос

$$\overline{z^i_j}(p^t) = \frac{\beta^i_j}{M(1-\beta^i)}\cdot\frac{p^t\cdot\omega}{p^t_j}, \quad \overline{x^i_j}(p^t) = \frac{\alpha^i_j\cdot\mu^i}{M(1-\beta^i)}\cdot\frac{p^t\cdot\omega}{p^t_j}, \quad j\in L.$$

Тогда цены в следующий момент времени формируется по закону:

$$\begin{cases} p^{t+1}_j = p^t_j + \varepsilon^t X_j(p^t) = p^t_j + \varepsilon^t\left(\dfrac{B_j}{M}\cdot\dfrac{p^t\omega}{p^t_j} - \omega_j\right) & \forall j \in L\setminus\{l\} \\ p^{t+1}_l = p^t_l. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon^t > 0$ итерационный параметр, характеризующий масштаб изменения цен на данной итерации. Отметим также, что по определению $p^t_l \equiv B_l/\omega_l$ для всех моментов времени $t \ge 0$.

Теорема 4 *Для сходимости процесса (**??**) достаточно, чтобы существовало такое $t' \in \mathbb{N}$, что $\forall\ t \ge t'$ последовательность итерационных параметров $\{\varepsilon^t\}_{t=0,1,2,\dots} > 0$ удовлетворяла условиям:*

$$\frac{\varepsilon^t}{2-\tau} + \left(1 - \frac{c_{\min}\omega_{\min}}{\omega_{\max}}\right)\sum_{i=0}^{t-1}\varepsilon^i \le \frac{p^0_{\min}}{\omega_{\max}},$$

$$\left(\frac{c_l}{\tau}+1\right)\varepsilon^t + \sum_{i=0}^{t-1}\chi^{t-i}\varepsilon^i \ge \chi^{t+1}\frac{p^0_{\max}}{\omega_{\min}},$$

где

$$\omega_{\max} = \max_{j\in L}\omega_j,\ \omega_{\min} = \min_{j\in L}\omega_j,\quad p^t_{\min} = \min_{j\in L}p^t_j,\quad p^t_{\max} = \max_{j\in L}p^t_j, c_{\min} = \min_{j\in L}c_j.$$