Существование решения задачи расчета американского опциона на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом

Реферат выступления.
Авторы: Хаметов В.М., Шелемех Е.А.

Доклад посвящен доказательству существования минимаксного решения задачи расчета американского опциона на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом.

Задача расчета американского опциона на неполном рынке рассматривалась в работах [1], [2]. В них, основываясь на равномерном разложении Дуба, установлены условия существования суперхеджирующего портфеля и оптимального для держателя опциона момента предъявления опциона к исполнению, которые являются инвариантными относительно любой эквивалентной мартингальной меры. Следует отметить, что в них отсутствуют способы построения суперхеджирующего портфеля и нахождения оптимального момента остановки. В настоящем докладе используется следующий подход: рассматривается экспоненциальная функция риска эмитента опциона, зависящая от дефицита (который равен разности между платежным обязательством и выручкой, полученной эмитентом от управления портфелем), затем от ожидаемого вышеуказанного риска берется точная верхняя грань по множеству эквивалентных вероятностных мер и моментов остановки, далее от получившегося выражения берется точная нижняя грань по множеству портфелей эмитента. Таким образом, рассматривается вспомогательная минимаксная задача. Основываясь на этом подходе, устанавливается и обосновывается связь между задачей расчета американского опциона на неполном рынке и вышеуказанной минимаксной задачей.

1. Необходимые сведения из теории опционов. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ задана d-мерная случайная последовательность $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, описывающая эволюцию цен d рисковых активов. Положим для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ $\mathcal{F}_n \triangleq \sigma\{S_0, ..., S_n\}$. Предположим также, что имеется один безрисковый актив, причем его доходность равна нулю, а начальная стоимость - единица. Такой набор называют $(1, S)$-рынком.

Обозначим через $\mathfrak{R}_N$ множество вероятностных мер $Q \sim P$ ($P \in \mathfrak{R}_N$), $\mathfrak{M}_N$ - множество мартингальных мер. Будем предполагать, что $\mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \emptyset$, то есть $(1, S)$-рынок является неполным [2].

Обозначим:

i) $\{f_n\}_{0\leq n\leq N}$ - последовательность $\mathcal{F}_n$-измеримых P-п.н. ограниченных случайных величин - динамическое платежное обязательство;

ii) $N \in \mathbb{N}^+$ - горизонт;

iii) $\mathcal{T}_n^N$ - множество моментов остановки τ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, принимающих значения на множестве $\{n, ..., N\}$, имеющее смысл множества всех возможных моментов времени, в которые предъявляется опцион к оплате его держателем эмитенту,

iv) $\{\gamma_n\}_{0\leq n\leq N}$ - d-мерная $\mathcal{F}$-предсказуемая случайная последовательность, компоненты элементов которой $\gamma_n^{(i)}$ имеют экономический смысл количества единиц i-ого рискового актива в момент времени n, $i=\overline{1,d}$. Через D_n^N обозначим множество случайных матриц $\gamma_n^N \triangleq (\gamma_n,...,\gamma_N)$, $dim\,\gamma_n^N = d\times(N-n+1)$, $0\leq n\leq N$;

v) $\{\beta_n\}_{0\leq n\leq N}$ - $\mathcal{F}$-предсказуемая одномерная случайная последовательность, элементы которой интерпретируют как количество единиц безрискового актива в момент времени n.

Случайную последовательность $\pi=(\beta_n,\gamma_n)_{0\leq n\leq\tau\wedge N}$ называют портфелем. Для любого n, $0\leq n\leq N\wedge\tau$, $\tau\in\mathcal{T}_0^N$, капиталом портфеля π на $(1,S)$-рынке называют $\mathcal{F}_{n\wedge\tau}$-измеримую случайную величину, обозначаемую через $X_{n\wedge\tau}^{(\pi)}$ и определяемую равенством

$$X_n^{(\pi)} \triangleq \beta_n + (S_n,\gamma_n).$$

Портфель π называют самофинансирующим, если для любого n, $0\leq n\leq N\wedge\tau$, выполняется P-п.н.

$$\triangle\beta_n = -(S_{n-1},\triangle\gamma_n).$$

Согласованную неубывающую случайную последовательность $\{C_{n\wedge\tau},\mathcal{F}_n\}_{0\leq n\leq N}$ с $C_n|_{n=0}=0$ называют потреблением. Набор (π,C) называют портфелем с потреблением. Для любого n, $0\leq n\leq N\wedge\tau$ капитал портфеля с потреблением (π,C) в момент времени n определим равенством

$$X_n^{(\pi,C)} \triangleq X_n^{(\pi)} - C_n.$$

Для любого n, $0\leq n\leq N\wedge\tau$ капитал портфеля с потреблением (π,C) P-п.н. допускает представление

$$X_{n\wedge\tau}^{(\pi,C)} = X_0^{(\pi,C)} + \sum_{i=1}^{n\wedge\tau}(\gamma_i,\triangle S_i) - C_{n\wedge\tau}.$$

2. Вспомогательная задача.

2.1. Постановка вспомогательной задачи.

Определение 1 *Набор* $\left((Q,\tau\wedge N),\gamma_n^{\tau\wedge N}\right)\in\left((\Re_N,\mathcal{T}_{n-1}^N),\gamma_n^{\tau\wedge N}\right)$ *назовем* $(n-1)$*-бистратегией,* $1\leq n\leq\tau\wedge N$.

Определение 2 *Для любого* $n, 0\leq n\leq\tau\wedge N$*, оценкой бистратегии* $\left((Q,\tau\wedge N),\gamma_{n+1}^{\tau\wedge N}\right)$ *назовем* $\mathcal{F}_{n\wedge\tau}$*-измеримую случайную величину, определяемую равенством*

$$I^{(Q,\tau\wedge N),\gamma_{n+1}^{\tau\wedge N}}(n,S_0^n) \triangleq M^Q\left[\exp\left\{f_{\tau\wedge N} - \sum_{i=n+1}^{\tau\wedge N}(\gamma_i,\triangle S_i)\right\}|\mathcal{F}_n\right], \qquad (1)$$

где $M^Q[\cdot|\mathcal{F}_n]$ - условное математическое ожидание относительно меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ и σ-алгебры $\mathcal{F}_n$, $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Определение 3 *Для любого $n, 0 \le n \le \tau \wedge N$, множество допустимых γ_{n+1}^N обозначим через $\hat{D}_{n+1}^N$ и определим равенством*

$$\hat{D}_{n+1}^N \triangleq \left\{ \gamma_{n+1}^N \in D_{n+1}^N : \operatorname*{ess\,sup}_{(Q,\tau)\in(\mathfrak{R}_N,\mathcal{T}_n^N)} I^{(Q,\tau\wedge N),\gamma_{n+1}^{\tau\wedge N}}(n, S_0^n) < \infty \ P-\text{п.н.} \right\}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$I^{(Q,\tau\wedge N),\gamma_1^{\tau\wedge N}}(0,S_0) \to \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_1^N\in\hat{D}_1^N} \operatorname*{ess\,sup}_{(Q,\tau)\in(\mathfrak{R}_N,\mathcal{T}_0^N)}. \tag{2}$$

Обозначим: $\bar{v}_0^N \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_1^N\in\hat{D}_1^N} \operatorname*{ess\,sup}_{(Q,\tau)\in(\mathfrak{R}_N,\mathcal{T}_0^N)} I^{(Q,\tau\wedge N),\gamma_1^{\tau\wedge N}}(0,S_0)$.

Определение 4 *Квартет $\left((Q^*,\tau^*),\gamma_1^{*N},\bar{v}_0^N\right)$, такой что P-п.н.*

$$\bar{v}_0^N = I^{(Q^*,\tau^*\wedge N),\gamma_1^{*\tau^*\wedge N}}(0,S_0)$$

назовем решением задачи (2), меру Q^* - наихудшей, момент остановки τ^* - оптимальным, γ_1^{*N} - минимаксной стратегией, а $\bar{v}_0^N$ - верхним гарантированным значением оценки бистратегии $I^{(Q,\tau\wedge N),\gamma_1^{\tau\wedge N}}(0,S_0)$.

2.2. Для нахождения решения задачи задачи (2) воспользуемся стохастическим вариантом метода динамического программирования. Для этого нам понадобится определение.

Определение 5 *$\mathcal{F}_n$-измеримую случайную величину*

$$\bar{v}_n^N \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{n+1}^N\in\hat{D}_{n+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{(Q,\tau)\in(\mathfrak{R}_N,\mathcal{T}_n^N)} I^{(Q,\tau\wedge N),\gamma_{n+1}^{\tau\wedge N}}(n,S_n)$$

назовем верхним гарантированным значением в момент времени n, $0 \le n \le N$.

Из (1) следует утверждение.

Теорема 1 *Существует константа $c > 0$, такая что для любого n, $0 \le n \le N$, справедливо неравенство $e^{-c} \le \bar{v}_n^N \le e^c$ P-п.н.*

Теорема 2 *Пусть фильтрация $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$ универсально полна. Тогда последовательность $\left(\bar{v}_n^N,\mathcal{F}_n\right)_{0\le n\le N}$ P-п.н. удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{cases} \bar{v}_n^N = \max\left\{ e^{f_n}; \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{n+1}\in\hat{D}_{n+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N} M^Q\left[\bar{v}_{n+1}^N e^{-(\gamma_{n+1},\,\triangle S_{n+1})}|\mathcal{F}_n\right]\right\}, \\ \bar{v}_n^N|_{n=N} = e^{f_N}. \end{cases} \tag{3}$$

2.3. В данном пункте мы установим существование решения задачи (2).

2.3.1. Для этого установим существование минимаксной стратегии.

Определение 6 *γ_n^* назовем n-минимаксным, если P-п.н. справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_n^N \in \hat{D}_n} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} M^Q \left[\bar{v}_n^N e^{-(\gamma_n, \triangle S_n)} | \mathcal{F}_{n-1} \right] = \\ = \left(\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} M^Q \left[\bar{v}_n^N e^{-(\gamma_n, \triangle S_n)} | \mathcal{F}_{n-1} \right] \right) \Big|_{\gamma_n = \gamma_n^*}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\left\{ \bar{v}_n^N \right\}_{0 \le n \le N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (3).

Теорема 3 *Пусть для любого k, $n \le k \le N$, существуют k-минимаксные γ_k^*. Тогда $\gamma_n^{*N} \in \hat{D}_n^N$.*

Теорема 4 (Критерий существования n-минимаксной стратегии) *Пусть $\left\{ \bar{v}_n^N \right\}_{0 \le n \le N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (3). Следующие утверждения эквивалентны:*

i) существует $(n-1)$-минимаксная стратегия, $1 \le n \le N$;

ii) для любого n, $1 \le n \le N$, и для любой стратегии $\gamma_n^N \in \hat{D}_n^N$ справедливо неравенство P-п.н.

$$M^Q \left[\bar{v}_n^N e^{-(\gamma_n, \triangle S_n)} | \mathcal{F}_{n-1} \right] \ge M^Q \left[\bar{v}_n^N e^{-(\gamma_n^*, \triangle S_n)} | \mathcal{F}_{n-1} \right];$$

iii) $\mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N \ne \emptyset$.

2.3.2. В этом пункте мы определяем и приводим критерий существования (S, τ)-опционального разложения ограниченной случайной величины.

Определение 7 *Пусть $\tau \in \mathcal{T}_0^N$ и $f_{\tau \wedge N}$ - $\mathcal{F}_{\tau \wedge N}$-измеримая ограниченная случайная величина и найдутся предсказуемая случайная последовательность $\{\gamma_n^*\}_{1 \le n \le \tau \wedge N}$, согласованная случайная последовательность $\{C_n\}_{0 \le n \le \tau \wedge N}$, $C_0 = 0$, и $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина X_0, такие что относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ справедливо равенство*

$$f_{\tau \wedge N} = X_0 + \sum_{i=1}^{\tau \wedge N} (\gamma_i^*, \triangle S_n) - C_{\tau \wedge N} \quad Q - \text{п.н.}$$

которое мы будем называть равномерным разложением Дуба относительно последовательности $\{S_n\}_{0 \le n \le N}$ или (S, τ)-опциональным разложением.

Теорема 5 (критерий существования равномерного разложения Дуба) *Любая $\mathcal{F}_{\tau\wedge N}$-измеримая ограниченная случайная величина $f_{\tau\wedge N}$ допускает равномерное разложение Дуба тогда и только тогда, когда найдется минимаксная стратегия γ_1^{*N}, причем $X_0 = \ln \bar{v}_0^N$, а $\left\{\bar{v}_n^N\right\}_{0\le n\le N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (3).*

2.3.3. Критерий существования "наихудшей" меры Q^*.

Для построения критерия существования "наихудшей" меры нам понадобится следующее определение.

Определение 8 *Для любого $\tau \in \mathcal{T}_0^N$ согласованную случайную последовательность $\left(\bar{\mu}_n^{\tau\wedge N}, \mathcal{F}_n\right)_{0\le n\le N}$, определенную равенством*

$$\bar{\mu}_n^{\tau\wedge N} = 1_{\{\tau\le n\}}\bar{v}_\tau^N e^{-\sum\limits_{i=1}^{\tau\wedge N}(\gamma_i^*, \triangle S_i)} + 1_{\{\tau>n\}}\bar{v}_n^N e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(\gamma_i^*, \triangle S_i)},$$

где $\left\{\bar{v}_n^N\right\}_{0\le n\le N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (3), γ_1^{*N} - минимаксная, назовем верхней (S,τ)-оценивающей.

Теорема 6 *Пусть $\left\{\bar{v}_n^N\right\}_{0\le n\le N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (3) и существует минимаксная стратегия γ_1^{*N}. Следующие утверждения эквивалентны:*

i) Q^* - единственная "наихудшая" мера ;

ii) множество $\mathfrak{R}_N$ относительно слабо компактно;

iii) $\left\{\bar{\mu}_n^{\tau\wedge N}\right\}_{0\le n\le N}$ - мартингал относительно меры Q^*.

2.3.4. Свойства "наихудшей" меры Q^*.

Теорема 7 *Пусть существуют минимаксная стратегия γ_1^{*N} и "наихудшая" мера Q^*. Тогда относительно меры Q^* случайная последовательность $(S_n, \mathcal{F}_n)_{0\le n\le N}$ - локальный мартингал.*

Обозначим $\bar{\mathfrak{R}}_N$ - замыкание множества $\mathfrak{R}_N$ в топологии слабой сходимости вероятностных мер.

Теорема 8 *Пусть существуют минимаксная стратегия γ_1^{*N} и "наихудшая" мера Q^*. Тогда $Q^* \in \bar{\mathfrak{R}}_N \setminus \mathfrak{R}_N$.*

Теорема 9 *Пусть существуют минимаксная стратегия γ_1^{*N} и "наихудшая" мера Q^*. Тогда мера Q^* - дискретная, причем ее носитель сосредоточен не более чем в $(d+1)^N$ точках.*

2.3.5. (S,τ)-представление любой ограниченной случайной величины относительно меры Q^*.

Определение 9 *Пусть $\tau \in \mathcal{T}_0^N$, а $f_{\tau\wedge N}$ - $\mathcal{F}_{\tau\wedge N}$-измеримая ограниченная случайная величина и найдутся предсказуемая случайная последовательность $\{\gamma_n^*\}_{1\le n\le \tau\wedge N}$ и $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина X_0, такие что относительно меры Q^* справедливо равенство*

$$f_{\tau\wedge N} = X_0 + \sum_{i=1}^{\tau\wedge N} (\gamma_i^*, \triangle S_n), \quad Q^* - \text{п.н.}$$

которое мы будем называть (S,τ)-представлением относительно меры Q^*.

Теорема 10 (**(S,τ)-представление относительно меры Q^***) *Пусть существуют минимаксная стратегия γ_1^{*N} и "наихудшая" мера Q^*. Тогда любая $\mathcal{F}_{\tau\wedge N}$-измеримая ограниченная случайная величина $f_{\tau\wedge N}$ допускает (S,τ)-представление относительно меры Q^*, причем $X_0 = M^{Q^*}[f_\tau|\mathcal{F}_0]$.*

2.3.6. Сведение задачи (2) к задаче об оптимальной остановке последовательности ограниченных случайных величин.

Теорема 11 *Оптимальный момент остановки τ^* в задаче (2) допускает представление*

$$\tau^* = \min\{0 \le n \le N : f_n = \ln \bar{v}_n^N \;\; Q^* - \text{п.н.}\}, \tag{5}$$

где $\left\{\bar{v}_n^N\right\}_{0\le n\le N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (3).

Теорема 12 *Пусть $\left\{\bar{v}_n^N\right\}_{0\le n\le N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (3) и существуют минимаксный γ_1^{*N}, "наихудшая" мера Q^*. Тогда $\{\ln \bar{v}_n^N\}_{0\le n\le N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, $0 \le n \le N$*

$$\begin{cases} \ln \bar{v}_n^N = \max\left\{f_n, M^{Q^*}\left[\ln \bar{v}_{n+1}^N|\mathcal{F}_n\right]\right\}, \\ \ln \bar{v}_n^N|_{n=N} = f_N \end{cases} \quad Q^* - \text{п.н.} \tag{6}$$

Теорема 12 сводит задачу (2) к задаче об оптимальной остановке.

2.3.7. Существование решения задачи (2).

Теорема 13 *Пусть фильтрация $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ универсально полна, $\mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \emptyset$ и множество $\mathfrak{R}_N$ слабо относительно компактно. Тогда существует решение задачи (2).*

3. Теория расчета американского опциона на неполном рынке с дискретным временем.

3.1. В данном пункте мы устанавливаем связь вспомогательной задачи (2) с задачей расчета американского опциона на неполном рынке с дискретным временем.

Определение 10 *Самофинансирующий портфель с потреблением* (π, C) *назовем суперхеджирующим (совершенным), если выполняется* $f_{\tau\wedge N} \leq X^{(\pi,C)}_{\tau\wedge N}$ $\left(f_{\tau\wedge N} = X^{(\pi,C)}_{\tau\wedge N}\right)$ *Q-п.н.*

Определение 11 *Суперхеджирующий портфель с потреблением* (π, C) *назовем минимальным хеджирующим портфелем с потреблением, если для любого другого суперхеджирующего портфеля с потреблением* $(\tilde{\pi}, \tilde{C})$, $(\tilde{\pi}, \tilde{C}) \neq (\pi, C)$, *для любого* n, $0 \leq n \leq N \wedge \tau$, *Q-п.н. справедливо неравенство* $X^{(\pi,C)}_{n\wedge\tau} \leq X^{(\tilde{\pi},\tilde{C})}_{n\wedge\tau}$.

Теорема 14 *Пусть* $\left\{\bar{v}^N_n\right\}_{0\leq n\leq N}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению (3) и существует минимаксный* γ^{*N}_1. *Тогда на* $(1, S)$*-рынке существует совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением* (π, C), *являющийся минимальным суперхеджирующим относительно любой меры* $Q \in \mathfrak{R}_N$, *такой что:*

i) γ^*_n *определяется соотношением (4);*

ii) $\{\beta^*_n\}_{0\leq n\leq\tau\wedge N}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению,* $0 \leq n \leq \tau \wedge N$

$$\begin{cases} \triangle\beta^*_n + (S_{n-1}, \triangle\gamma^*_n) = 0, \\ \beta^*_n|_{n=0} = \beta_0 \end{cases} \quad Q - п.н.$$

причем β^*_0 *можно выбрать равным* $\ln \bar{v}^N_0$, *а* $\gamma^*_0 = 0$.

Для любого n, $0 \leq n \leq \tau \wedge N$, *капитал портфеля* π *допускает представление*

$$X^{(\pi)}_n = \beta^*_n + (\gamma^*_n, S_n),$$

а капитал портфеля с потреблением (π, C) *допускает представление*

$$X^{(\pi,C)}_n = \ln \bar{v}^N_n, \quad Q - п.н.$$

причем потребление $\{C^*_n\}_{0\leq n\leq\tau\wedge N}$ *допускает представление,* $0 \leq n \leq N \wedge \tau$

$$\begin{cases} C^*_n = (\gamma^*_n, \triangle S_n) - \triangle X^\pi_n, \\ C^*_n|_{n=0} = 0. \end{cases} \quad Q - п.н.$$

Теорема 14 позволяет рассчитать опцион американского типа относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$.

3.2. Минимаксное хеджирование американского опциона на неполном рынке.

Определение 12 *Пусть существует решение задачи (2), такое что выполняется*

$$f_{\tau^*\wedge N} = X^{(\pi^*)}_{\tau^*\wedge N} \;\; Q^* - п.н.$$

Такой рынок для продавца назовем Q^**-полным рынком, а портфель* π *- минимаксным хеджирующим.*

Теорема 15 *Пусть существует решение задачи (2). Тогда существует минимаксный суперхеджирующий портфель π^*, являющийся минимальным совершенным суперхеджирующий относительно меры Q^*, где*

1) $\mathcal{F}_{n-1}$ - измеримый d-мерный вектор γ_n^*, определяемый из (4);

2) $\mathcal{F}_{n-1}$ - измеримый d-мерный вектор β_n^*, удовлетворяющий рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \beta_{n+1}^* = \beta_n^* - (\gamma_{n+1}^*, \triangle S_{n+1}), \\ \beta_n^*|_{n=0} = \beta_0^*, \end{cases}$$

причем $\beta_0^* = \ln \bar{v}_0^N$, $\gamma_0^* = 0$.

Относительно меры Q^* капитал $X_{n\wedge\tau^*}^{\pi^*}$ самофинансирующего портфеля π^* допускает представления, $0 \le n \le \tau^* \wedge N$

$$X_n^{(\pi^*)} = \ln \bar{v}_n^N = X_0^{(\pi^*)} + \sum_{i=1}^{\tau^*\wedge n} (\gamma_i^*, \triangle S_i),$$

причем $X_{\tau^*\wedge N}^{(\pi^*)} = f_{\tau^*\wedge N}$, $X_0^{(\pi^*)} = \ln \bar{v}_0^N = M^{Q^*}[f_{\tau^*\wedge N}|\mathcal{F}_0]$, где τ^* - оптимальный в задаче (2) и определяется соотношением (5).

В докладе также представлено несколько численных примеров решения задачи об оптимальной остановке различных ограниченных функций.

Литература.

1. Фельмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время / Пер. с англ. - М.: МЦНМО, 2008.

2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики (теория). Том 2. Теория. М.: Фазис, 1998